

Mikropolare Plastizität

Micropolar plasticity

Bachelor-Thesis von George Humberto Bernui Urday aus Lima (Perú)

Tag der Einreichung:

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis
2. Gutachten: Dr.-Ing. Carsten Bröse



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

FB Bau- und Umweltingenieurwesen
FG Kontinuumsmechanik

Mikropolare Plastizität
Micropolar plasticity

Vorgelegte Bachelor-Thesis von George Humberto Bernui Urday aus Lima (Perú)

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis
2. Gutachten: Dr.-Ing. Carsten Bröse

Tag der Einreichung:

Danksagung

Meinen herzlichen Dank möchte ich meinem wissenschaftlichen Lehrer und Betreuer Herrn Dr.-Ing. Carsten Bröse aussprechen, wer mich mit Geduld und Vernunft durch die ganze Bearbeitung dieser Thesis geführt hat: ohne Sie wäre die Entstehung dieser Bachelorarbeit nicht möglich.

Ich wollte auch mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis und Herrn Dipl.-Ing. Jan Frischmann für die Erweckung meiner Interesse an die Kontinuumsmechanik und bei Frau Dipl.-Math. Eleni Tsakmaki für Ihre Betreuung bedanken.

Quisiera también agradecer, en mi lengua materna, a cada una de las personas y amigos que me acompañaron durante estos meses en este trayecto, especialmente a Rodrigo, por sus consejos, invaluable amistad y por ser mi hermano de otros padres, a Diego por los momasos y su amistad inmune a las distancias, y a Christian, por su entendimiento de la Filosofía y su apreciación de la vida.

En este punto, desearía reiterarle mi inmensa gratitud a Bruni, por apoyarme en cada momento y sin miramientos, hacerme sonreír cada día con sus ocurrencias y ser la persona más buena que haya conocido: un ángel en la tierra.

Para mis abuelos y mi madre, que supieron sacarme adelante y creer en mí, aún cuando no tenían razones para hacerlo. Para mi padre Humberto Carlos y mis madres Rosa y Rosa Beatriz, gracias por vuestro amor incondicional.



Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit wird eine mikropolare Plastizitätstheorie für finite Deformationen, die kinematische und isotrope Verfestigung berücksichtigt, vorgelegt. Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten und des mikropolaren Rotationstensors, in elastischen und plastischen Anteil, sind charakteristischen Eigenschaften dieser Theorie.

Das Modell wird mittels eines numerischen Verfahrens umgesetzt, um mechanisches Verhalten betrachten zu können. Im Rahmen dieser Thesis wird es mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode diskutiert. Dieses Modell wird im freien Finite-Elemente-Programm Elmer implementiert.

Die vorliegende mikropolare Plastizitätstheorie ist fähig, Längenskaleneffekte im Materialverhalten wiederzugeben. Die numerischen Ergebnisse werden qualitativ mit experimentellen Befunde gegenübergestellt.



Abstract

In this bachelorthesis a micropolar plasticity theory for finite deformations is presented, it considers kinematic and isotropic hardening for its foundations. The multiplicative decomposition of the deformation gradient and the micropolar rotation tensor, into elastic and plastic shares, are characteristic features of this theory.

The model will be integrated into a numerical analysis in order to contemplate the mechanic behaviour. Within the context of this thesis the model will be discussed with the help of the finite element method. The programme chosen for the implementation of this model is the free finite element programme Elmer.

The available micropolar plasticity theory is able to portray the length scale effects in the material behaviour. The numerical results are qualitatively compared with experimental outcome.



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Längenabhängigkeiten im Materialverhalten	1
1.2. Aufbau der Bachelor-Thesis	1
2. Grundlagen der mikropolaren Theorie	3
2.1. Vergleich mit der klassischen Theorie	3
2.2. Kinematik und freie Energiefunktion	3
2.3. Zerlegung der Deformation	4
2.4. Kinematische und isotrope Verfestigung	5
2.5. Formulierung der Modellgleichungen in der Momentankonfiguration	6
2.5.1. Verzerrungsmaße	6
2.5.2. Elastizitätsgesetze	6
2.5.3. Fließfunktion	6
2.5.4. Evolutionsgleichungen der internen Verzerrungsgrößen ε_p und K_p (Normalenregeln)	7
2.5.5. Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigung	7
2.5.6. Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung k	7
3. Numerische Berechnung: Finite-Elemente-Modell bei der Torsion eines Vollzylinders	9
3.1. Materialparameter und Probegeometrien	9
3.2. Das Experiment: Einfache Torsion eines Kreiszylinders	10
3.2.1. Modellierung	11
3.3. Preprocessing: Elmer Finite-Elemente-Methode-Programm	13
3.4. Programme für das Postprocessing	13
3.4.1. Gmsh	13
3.4.2. Awk	13
3.4.3. Gnuplot	15
4. Ergebnisse: Modellvoraussagungen	17
4.1. Keine Verfestigung	18
4.1.1. Torsionsmoment	18
4.1.2. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5	18
4.1.3. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5	21
4.2. Reine kinematische Verfestigung	24
4.2.1. Torsionsmoment	24
4.2.2. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5	24
4.2.3. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5	27
4.3. Reine isotrope Verfestigung	30
4.3.1. Torsionsmoment	30
4.3.2. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5	30
4.3.3. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5	33
4.4. Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung	36
4.4.1. Torsionsmoment	36
4.4.2. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5	36
4.4.3. Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5	39
4.5. Vergleich der Modellvoraussagungen mit dem Fall der Scherung $\gamma_a = 0.7$	42
A. Bewertung der Ergebnisse und Ausblick	45
A.1. Bewertung der Ergebnisse	45
A.2. Ausblick	48
B. Numerische Berechnung	49
B.1. Elmer FEM	49
B.1.1. makefile	49

B.1.2. rot_zylinder.sif	49
C. Auswertungsroutine	53
C.1. Awk	53
C.1.1. progtesis.awk	53
C.1.2. Sortier-Befehl in Terminal	53
C.1.3. progs1.awk	53
C.1.4. progrot.awk	53
C.1.5. progfin.awk	54
C.1.6. progpro.awk	54
C.2. Gnuplot	54
C.2.1. zylinder.plt	54
C.2.2. progtesis.gp	55

Abbildungsverzeichnis

2.1. Spannungen bei der klassischen (links) und mikropolaren (links und rechts) Theorie.	3
2.2. F, \bar{R} wirken auf Vektoren aus der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R und bilden auf Vektoren aus der Momentan- konfiguration \mathcal{R}_t ab.	3
2.3. Die plastische Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$	5
2.4. Elastische Verzerrung des Gitters.	5
2.5. Plastische Verzerrung des Gitters.	5
2.6. Plastische Verfestigungsmöglichkeiten.	6
3.1. Skizze für die Beschreibung des Experimentes.	10
3.2. Das Verhältnis $M/r_a^3 = Q/a$ als Funktion der Scherung γ_a für Torsionsproben aus Kupfer mit verschiede- nen Durchmessern nach [Fleck et al., 1994] (Q, a, k aus [Fleck et al., 1994] entsprechen in dieser Thesis M, r_a, ϑ).	10
3.3. Grundfläche des Zylinders.	11
3.4. 3D-Modell des Zylinders.	11
3.5. Inhomogene Deformation bei der Torsionbeanspruchung.	11
3.6. Einfache Torsion der Probe 1 bei $\gamma_a = 0.25$	12
3.7. Randbedingungen für die untere Grundfläche und die obere Grundfläche des Zylinders.	12
3.8. Randbedingungen der makroskopischen Rotation an die obere Grundfläche.	12
3.9. Randbedingung der mikropolaren Rotation an den Knoten am Anfang der Torsion.	12
3.10. Knoten, die betrachtet werden.	14
3.11. Ergebnisbeispiel nach der Awk-Bearbeitung der <code>rot_zylinder_meshout.msh</code> -Dateien.	15
4.1. Skizze zur Erklärung der Gleichung 4.1.	17
4.2. Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter keinem Einfluss von Verfestigungen.	18
4.3. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1. . . .	18
4.4. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2. . . .	19
4.5. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3. . . .	19
4.6. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4. . . .	20
4.7. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5. . . .	20
4.8. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1. . . .	21
4.9. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2. . . .	21
4.10. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3. . . .	22
4.11. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4. . . .	22
4.12. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5. . . .	23
4.13. Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss von kinema- tischer Verfestigung.	24
4.14. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1. . . .	24
4.15. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2. . . .	25
4.16. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3. . . .	25
4.17. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4. . . .	26
4.18. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5. . . .	26
4.19. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1. . . .	27
4.20. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2. . . .	27
4.21. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3. . . .	28
4.22. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4. . . .	28
4.23. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5. . . .	29
4.24. Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss von isotroper Verfestigung.	30
4.25. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1. . . .	30
4.26. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2. . . .	31
4.27. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3. . . .	31
4.28. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4. . . .	32
4.29. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5. . . .	32

4.30. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1. . .	33
4.31. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2. . .	33
4.32. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3. . .	34
4.33. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4. . .	34
4.34. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5. . .	35
4.35. Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss von kinematischer und isotroper Verfestigung.	36
4.36. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1. . .	36
4.37. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2. . .	37
4.38. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3. . .	37
4.39. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4. . .	38
4.40. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5. . .	38
4.41. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1. . .	39
4.42. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2. . .	39
4.43. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3. . .	40
4.44. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4. . .	40
4.45. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5. . .	41
4.46. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss keiner Verfestigung.	42
4.47. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer Verfestigung.	42
4.48. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss isotroper Verfestigung.	43
4.49. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung.	43
A.1. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} mit der Scherung $\gamma_a = 0.9$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung nach [Grammenoudis, 2003].	46
A.2. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} mit der Scherung $\gamma_a = 0.9$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung.	46
A.3. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Probe 1 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung nach [Grammenoudis, 2003].	47
A.4. Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Probe 1 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung.	47
A.5. Verlauf der Spannung σ_{zz} bei $\gamma_a = 1$ der Probe 1.	48

Tabellenverzeichnis

3.1. Materialparameter aus [Grammenoudis, 2003] für die Elastizitätsgesetze, die Fließfunktion und die Fließgrenze.	9
3.2. Probegeometrien bei der Torsion.	9
3.3. Abschnitte in einer .sif Datei und ihre Aufgaben. n ist mit dem Abschnittnamen verknüpft.	13
3.4. Betrachteten Knoten und ihre Verhältnisse zum Radius.	14

1 Einleitung

1.1 Längenabhängigkeiten im Materialverhalten

Die klassische Plastizitätstheorie wird in lokaler Form formuliert: der momentane Wert der Spannung an einem materiellen Punkt hängt nur von seinem Zustand und seiner Geschichte ab und der Zustand benachbarter Punkten ist irrelevant. Wenn man Phänomene diskutiert, die in derselben Größenordnung der inneren Längenskalen liegen, dann muss man nichtlokale Materialgleichungen formulieren.

Die Entwicklung einer nichtlokalen Kontinuumsmechanik fing mit dem Werk der Cosserat Brüder [Cosserat et al., 1909] an. Für die Beschreibung mikroskopischer Effekte des Materialverhaltens wurde von [Eringen, 1999a] und [Mindlin, 1964] vorgeschlagen, das Material als ein Makrokontinuum mit einer Mikrostruktur (Mikrokontinuum) zu betrachten. Das Mikrokontinuum ist an jeden einzelnen materiellen Punkt als eine Substruktur verankert und wird als einen deformierbaren Körper angenommen. Der Deformationsgradient des Mikrokontinuums ist vom im Makrokontinuum betrachteten Punkt und seine Lage innerhalb der Mikrostruktur abhängig. Man unterscheidet zwischen zwei Sonderfällen, die für diese Arbeit relevant sind: das Mikrokontinuum wird als einen starren Körper betrachtet (mikropolare Theorie) oder es erfährt auch homogene Deformationen (mikromorphe Theorie). Die mikropolare Theorie befasst sich sowohl mit dem Deformationsgradient des Makrokontinuums als auch mit dem des Mikrokontinuums und seines Gradienten relativ zu den Ortskoordinaten des Makrokontinuums.

1.2 Aufbau der Bachelor-Thesis

Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen der mikropolaren Theorie beschrieben. Es beinhaltet einen Vergleich mit der klassischen Theorie, sowie eine Formulierung der notwendigen Gleichungen in der Momentankonfiguration. Das Elastizitätsgesetz, die Fließ- und Verfestigungsregeln werden aus [Grammenoudis and Tsakmakis, 2001] und [Grammenoudis and Tsakmakis, 2005] entnommen. Das Kapitel 3 erarbeitet die numerische Berechnung mit einem Finite-Elemente-Modell für die Torsion eines Vollzylinders. Dafür werden das Experiment, das Modell, die Materialparameter, sowie die Programme für das Pre- und Postprocessing vorgestellt. Im Kapitel 4 werden die Modellvoraussagungen präsentiert. Man unterscheidet hierbei zwischen den Ergebnissen der reinen kinematischen, der reinen isotropen und der kombinierten Verfestigung, sowie ein Ergebnis ohne Verfestigung. Im Anhang werden die Pre- und Postprocessing Programme beschrieben.



2 Grundlagen der mikropolaren Theorie

Für die Formulierung der Theorie wird zuerst die Kinematik und dann die Gleichungen in der Momentankonfiguration dargestellt. Die Theorie wird aus [Grammenoudis and Tsakmakis, 2001] und [Grammenoudis and Tsakmakis, 2005] entnommen.

2.1 Vergleich mit der klassischen Theorie

Betrachtet man einen materiellen Punkt eines Körpers, so stellt man bei der klassischen Theorie fest, dass er drei Freiheitsgrade besitzt (im Fall eines kartesischen Koordinatensystems: Translationen u_x , u_y und u_z , Elemente des Verschiebungsvektors \vec{u}). Die mikropolare Theorie besagt andererseits (z.B. bei Sand oder Reis), dass der materielle Punkt insgesamt 6 Freiheitsgrade besitzt: drei Translationen, wie in der klassischen Theorie, und dazu drei Rotationen um die x-, y- und z-Achse (φ_x , φ_y und φ_z , Elemente des Rotationsvektors $\vec{\varphi}$). Die klassische Theorie erlaubt nur klassischen (Cauchy-)Spannungen während die mikropolare Theorie klassischen Spannungen und Momentenspannungen erlaubt (Abbildung 2.1).

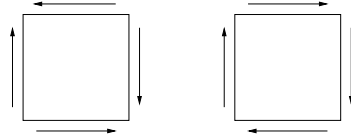


Abbildung 2.1.: Spannungen bei der klassischen (links) und mikropolaren (links und rechts) Theorie.

2.2 Kinematik und freie Energiefunktion

Ein mikropolares Material wird als ein Kontinuum definiert, bei dem an jeden einzelnen materiellen Punkt eine Substruktur (als Mikrokontinuum in Abbildung 2.2 bezeichnet) verankert ist ([Eringen, 1999b] und [Eringen and Suhubi, 1964]). Das Mikrokontinuum verhält sich wie ein starrer Körper, der nur Rotation aber keine Deformation erlaubt.

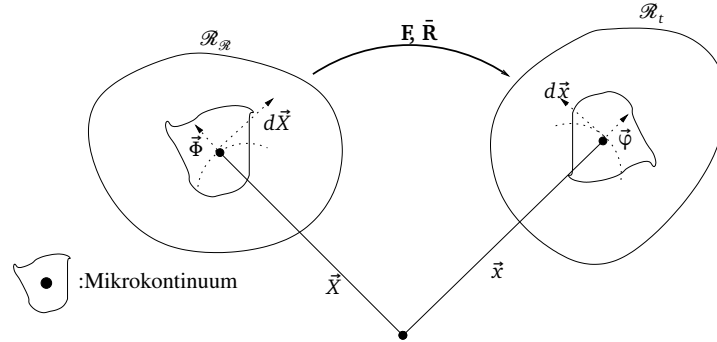


Abbildung 2.2.: F , \bar{R} wirken auf Vektoren aus der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R und bilden auf Vektoren aus der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t ab.

Die Deformation des Körpers beschreibt man mit Hilfe von Gleichungen 2.1 und 2.2, wobei der Deformationsgradient F und der Rotationstensor \bar{R} 2-Punkt Tensorfelder sind und \bar{R} orthogonal ist:

$$d\vec{x} = F d\vec{X} \quad (2.1)$$

$$\vec{\varphi} = \bar{R} \vec{\Phi} \text{ mit } \bar{R}^T = \bar{R}^{-1}. \quad (2.2)$$

$d\vec{x}$ ist ein Tangentenvektor in der Momentankonfiguration und $d\vec{X}$ ein Tangentenvektor in der Referenzkonfiguration. F definiert man als: $F = \text{GRAD}(\vec{x}) = \partial \vec{x} / \partial \vec{X}$. $\vec{\varphi}$ und $\vec{\Phi}$ sind Ortsvektoren innerhalb des Mikrokontinuums, beide nehmen ihren Ursprung im Punkt, wo das Mikrokontinuum verankert ist. \bar{R} wirkt auf Ortsvektoren des Mikrokontinuums aus der Referenzkonfiguration und bildet auf Ortsvektoren des Mikrokontinuums aus der Momentankonfiguration.

Die freie Energiefunktion beschreibt alle Energieanteile, die im Material reversibel gespeichert werden [Bröse, 2017]. Man macht die Annahme bei einem mikropolaren Material, dass die freie Energiefunktion von F , \bar{R} und dem Gradienten in der Referenzkonfiguration von \bar{R} abhängt: $\Psi = \bar{\Psi}(F, \bar{R}, \text{GRAD}\bar{R})$. D.h. Längenskalen-Effekte sind im Material beschreibbar, wegen der Berücksichtigung von $\text{GRAD}\bar{R}$. Neben dieser Annahme benutzt man das Prinzip der materiellen Objektivität, das postuliert, dass jede Materialgleichung unabhängig vom Bezugssystem sein soll [Haupt, 1996]. Für die freie Energiefunktion bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \bar{\Psi}(QF, Q\bar{R}, Q \text{GRAD}\bar{R}) \stackrel{!}{=} \bar{\Psi}(F, \bar{R}, \text{GRAD}\bar{R}) \\ \Psi^*(\text{gedrehtes System}) &\stackrel{!}{=} \Psi(\text{ungedrehtes System}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wählt man z.B. $Q = \bar{R}^T$, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \Psi &= \bar{\Psi}(\bar{R}^T F, \bar{R}^T \bar{R}, \bar{R}^T \text{GRAD}\bar{R}) \\ \text{mit } F &= \bar{R}U \Leftrightarrow U = \bar{R}^T F \\ \Rightarrow \Psi &= \bar{\Psi}(U, 1, \bar{R}^T \text{GRAD}\bar{R}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wobei in Gleichung 2.4, U der rechte Strecktensor aus der polaren Zerlegung von F ist. Man ersetzt dann U , sodass:

$$\begin{aligned} \Psi &= \bar{\Psi}(\varepsilon, \mathcal{K}) \\ \text{mit } \varepsilon &= U - 1 \text{ und } \mathcal{K} = \bar{R}^T \text{GRAD}\bar{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

\mathcal{K} ist ein Tensor 3. Stufe und ε ein Tensor 2. Stufe. Beide sind die Verzerrungsmaße für die Beschreibung des Materialzustands. Es ist aber numerisch aufwändig mit einem Tensor 3. Stufe zu rechnen, deswegen reduziert man \mathcal{K} auf ein Tensor 2. Stufe. K ist der axiale Vektor von \mathcal{K} :

$$K = \text{axl}(\mathcal{K}). \quad (2.6)$$

2.3 Zerlegung der Deformation

Man macht die Annahme, in der klassischen Plastizitätstheorie, der Deformationsgradient sei multiplikativ in elastischen und plastischen Anteil zerlegbar:

$$F = F_e F_p. \quad (2.7)$$

Hier muss F_e die Bedingung $\det F_e > 0$ erfüllen. Da $\det F > 0$ sein muss, gilt deswegen $\det F_p > 0$. Man nimmt an, die Gleichung 2.7 sei für die mikropolare Plastizität ebenfalls gültig. Zusätzlich zerlegt man \bar{R} in elastischen und plastischen Anteil:

$$\bar{R} = \bar{R}_e \bar{R}_p, \quad (2.8)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass \bar{R}_e und \bar{R}_p eigentlich orthogonale Tensoren sind (d.h. $\det(\bar{R}_e) = +1$ und $\det(\bar{R}_p) = +1$). Die Tensoren F_p und \bar{R}_p wirken auf die Vektoren $d\vec{X}$ und $\vec{\Phi}$ aus der Referenzkonfiguration und bilden auf die Vektoren $d\vec{x}$ und $\vec{\varphi}$ in einer sogenannten plastischen Zwischenkonfiguration \mathcal{B}_t gemäß

$$d\vec{x} = F_p d\vec{X}, \quad (2.9)$$

$$\vec{\varphi} = \bar{R}_p \vec{\Phi} \quad (2.10)$$

ab (Abbildung 2.3).

Aus den Gleichungen 2.1, 2.2 und 2.7 ergibt sich

$$d\vec{x} = F_e d\vec{X}, \quad (2.11)$$

$$\vec{\varphi} = \bar{R}_e \vec{\varphi}. \quad (2.12)$$

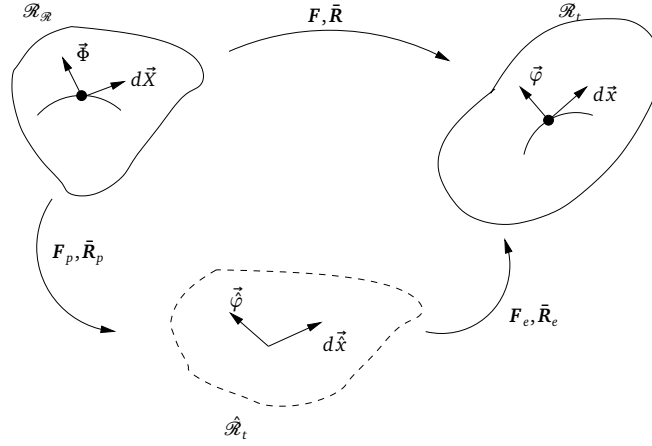


Abbildung 2.3.: Die plastische Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{R}}_t$.

Es gelten die folgenden polaren Zerlegungen:

$$F_e = R_e U_e = V_e R_e, \quad (2.13)$$

$$F_p = R_p U_p = V_p R_p, \quad (2.14)$$

wobei U_e, V_e, U_p, V_p symmetrische, positiv definite Tensoren und R_e, R_p eigentlich orthogonale Tensoren darstellen.

2.4 Kinematische und isotrope Verfestigung

Wir nehmen an, für plastisches Fließen müsse einen bestimmten Zustand vorliegen. Eine solche Fließbedingung wird als $f = \hat{f}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_c, \xi, \xi_c, k)$ beschrieben, was eine Darstellung einer Fläche (=Fließfläche) im neundimensionalen Raum abhängig von der klassischen Spannung \mathcal{S} , der Momentanspannung \mathcal{S}_c , kinematischer Verfestigung im klassischen Sinne ξ , mikropolarer kinematischer Verfestigung ξ_c und isotroper Verfestigung k entspricht [Gross and Seelig, 2016]. Die Fließfunktion f nimmt einen Wert kleiner Null bei Belastungen im elastischen Bereich. Plastizität liegt vor, wenn f gleich Null ist. Ein Wert größer Null ist bei Plastizität nicht möglich. Das plastische Fließen ist irreversibel [Wriggers, 2008] und bei der plastischen Verfestigung beobachtet man, dass die Fließfläche ihre Lage und Form während dem Verlauf vom Fließvorgang verändert.

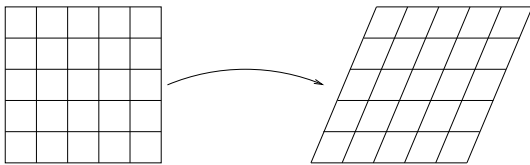


Abbildung 2.4.: Elastische Verzerrung des Gitters.

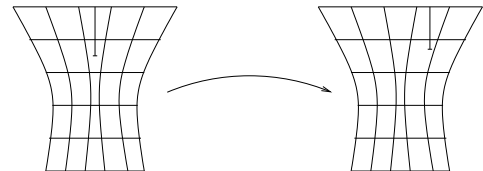


Abbildung 2.5.: Plastische Verzerrung des Gitters.

Man nimmt an, die freie Energiefunktion sei in elastischen Ψ_e und plastischen Anteil Ψ_p zerlegbar ($\Psi = \Psi_e + \Psi_p$). Bei einer elastischen Verzerrung des Gitters wird der elastische Anteil Ψ_e der freien Energiefunktion Ψ im deformierten Gitter gespeichert. Bei einer plastischen Verzerrung erfolgt die Translation der Störstellen im Gitter, wie in Abbildung 2.5 bei „ \perp “ zu sehen ist. Um die Störstellen ist noch Energie reversibel gespeichert. Diese im gestörten Gitter gespeicherte Energie ist der plastische Anteil Ψ_p der freien Energiefunktion Ψ . Die Störstellen können zwei Arten von Verfestigungen verursachen. Um beide zu erklären wird eine Skizze benötigt. Die Abbildung 2.6 zeigt wie die isotrope und kinematische Verfestigung in Abhängigkeit von der Störstellen visualisiert werden können:

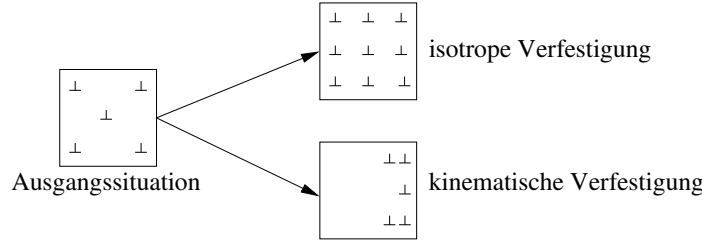


Abbildung 2.6.: Plastische Verfestigungsmöglichkeiten.

Die isotrope Verfestigung kennzeichnet sich durch die Neubildung von Versetzungen („selbstähnliche Aufblähung“ nach [Gross and Seelig, 2016]) und die kinematische Verfestigung durch den Aufstau von Versetzungen in eine Richtung („Translation der Versetzungen“ nach [Gross and Seelig, 2016]).

2.5 Formulierung der Modellgleichungen in der Momentankonfiguration

2.5.1 Verzerrungsmaße

In Gleichung 2.15 ist \mathbf{V} der linke Strecktensor und \mathbf{K} der axiale Tensor von \mathcal{K} . $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist das Verzerrungsmaß der klassischen Theorie und \mathbf{K} das der mikropolaren Theorie, unterteilt in elastischen ($\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{K}_e$) und plastischen ($\boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{K}_p$) Anteil:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{1} - \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{1} - (\mathbf{F}\mathbf{R}^T)^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \mathbf{K} &= \bar{\mathbf{R}} \left\{ axl(\bar{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \mathbf{X}_k}) \right\} \otimes \vec{E}_k = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_p.\end{aligned}\quad (2.15)$$

2.5.2 Elastizitätsgesetze

Bei der mikropolaren Theorie betrachtet man zwei Arten von Spannungen: eine im klassischen Sinne dargestellte Spannung \mathbf{S} und eine Koppelspannung (Momentenspannung) \mathbf{S}_c :

$$\mathbf{S} = \lambda Sp(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{1} + (\mu + \alpha) \boldsymbol{\varepsilon}_e + (\mu - \alpha) \boldsymbol{\varepsilon}_e^T, \quad (2.16)$$

\mathbf{S} ist die Cauchy-Spannung. α , λ und μ sind Materialkonstanten;

$$\mathbf{S}_c = \beta Sp(\mathbf{K}_e) \mathbf{1} + (\gamma + \delta) \mathbf{K}_e + (\gamma - \delta) \mathbf{K}_e^T, \quad (2.17)$$

\mathbf{S}_c ist die Koppelspannung infolge räumlich unterschiedlicher Rotation der Mikrostruktur. β , γ und δ sind Materialkonstanten.

2.5.3 Fließfunktion

Die Fließfunktion f wird als eine Funktion der kinematischen Verfestigung ($\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\xi}_c$), isotropen Verfestigung k , Cauchy-Spannung \mathbf{S} und der Momentenspannung \mathbf{S}_c geschrieben. In Gleichung 2.18 ist $\boldsymbol{\xi}$ der Translationstensor der kinematischen Verfestigung im klassischen Sinne; $\boldsymbol{\xi}_c$, der im Translationstensor der mikropolaren kinematischen Verfestigung und k die isotrope Verfestigung:

$$f = \hat{f}(\mathbf{S}, \mathbf{S}_c, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_c, k). \quad (2.18)$$

Mit α_1 , α_2 , α_3 und α_4 als Materialkonstanten ist f gegeben durch:

$$\begin{aligned}f &= \{(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D (\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S} - \boldsymbol{\xi})^D (\mathbf{S}^T - \boldsymbol{\xi}^T)^D \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D (\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \boldsymbol{\xi}_c)^D (\mathbf{S}_c^T - \boldsymbol{\xi}_c^T)^D\}^{1/2} - k\end{aligned}\quad (2.19)$$

$()^D$ ist der deviatorische Anteil eines Tensors.

2.5.4 Evolutionsgleichungen der internen Verzerrungsgrößen ε_p und K_p (Normalenregeln)

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_p - \mathbf{\Omega} \varepsilon_p + \varepsilon_p L = \frac{\dot{s}}{\chi(f+k)} [(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \xi)^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \xi^T)^D] \quad (2.20)$$

In Gleichung 2.20 ist $\dot{(\cdot)}$ die objektive Zeitableitung (Oldroyd-Ableitung), $L = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ der Geschwindigkeitsgradient und \dot{s} die plastische Bogenlänge.

$$\dot{K}_p = \dot{K}_p - \mathbf{\Omega} K_p + K_p \mathbf{\Omega}^T = \frac{\dot{s}}{\chi(f+k)} [(\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \xi_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \xi_c^T)^D]. \quad (2.21)$$

In Gleichung 2.21 ist $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ ein schiefsymmetrischer Tensor und χ ist durch

$$\begin{aligned} \chi = \frac{1}{f+k} \{ & [(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \xi)^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \xi^T)^D] \\ & \cdot [(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{S} - \xi)^D + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{S}^T - \xi^T)^D] \\ & + [(\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \xi_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \xi_c^T)^D] \\ & \cdot [(\alpha_3 + \alpha_4)(\mathbf{S}_c - \xi_c)^D + (\alpha_3 - \alpha_4)(\mathbf{S}_c^T - \xi_c^T)^D] \}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

gegeben.

2.5.5 Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigung

Man definiert die Translationstensoren der kinematischer Verfestigung durch

$$\begin{aligned} \xi &= (\mathbf{1} - \mathbf{Y}^T) \mathbf{Z} \\ \xi_c &= \mathbf{Z}_c \\ \text{wo } \mathbf{Z} \text{ und } \mathbf{Z}_c \text{ mit Hilfe der Materialkonstanten } c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \text{ und } c_6 \text{ definiert werden:} \\ \mathbf{Z} &= c_1 (Sp \mathbf{Y}) \mathbf{1} + (c_2 + c_3) \mathbf{Y} + (c_2 - c_3) \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Z}_c &= c_4 (Sp \mathbf{Y}_c) \mathbf{1} + (c_5 + c_6) \mathbf{Y}_c + (c_5 - c_6) \mathbf{Y}_c^T. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Evolutionsgleichungen für die Dehnungen \mathbf{Y} und \mathbf{Y}_c der kinematischen Verfestigung sind:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}} &= \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{\Omega} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} L = \dot{\varepsilon}_p - \dot{s} [(b_1 + b_2) \mathbf{Z} + (b_1 - b_2) \mathbf{Z}^T] \\ \dot{\mathbf{Y}}_c &= \dot{\mathbf{Y}}_c - \mathbf{\Omega} \mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_c \mathbf{\Omega}^T = \dot{K}_p - \dot{s} [(b_{c1} + b_{c2}) \mathbf{Z}_c + (b_{c1} - b_{c2}) \mathbf{Z}_c^T] \\ &\text{mit den Materialkonstanten } b_1, b_2, b_{c1} \text{ und } b_{c2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.5.6 Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung k

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{\dot{s}}{\chi} \cdot [\gamma^{(iso)} - \beta^{(iso)}(k - k_0)] \\ &\text{mit } \gamma^{(iso)}, \beta^{(iso)} \text{ als Materialparameter und } k_0 \text{ als Materialkonstante (Anfangsfließgrenze).} \end{aligned} \quad (2.25)$$



3 Numerische Berechnung: Finite-Elemente-Modell bei der Torsion eines Vollzylinders

In diesem Abschnitt werden die gewählten Parameter, Geometrien und das Modell für das Torsionsexperiment, so wie die Vorgehensweise bei Pre- und Postprocessing dargelegt. Es wird den Unterschied zwischen dem in dieser Thesis verwendeten Modell und dem von [Grammenoudis, 2003] benutzten Modell für die Simulationen vorgestellt.

3.1 Materialparameter und Probegeometrien

Man übernimmt in dieser Arbeit die von [Grammenoudis, 2003] gewählten Materialparameter und Probegeometrien (siehe Tabelle 3.1 und 3.2) für die vorliegenden numerischen Berechnungen, weil ihre Ergebnisse mit denen der experimentellen Entdeckungen aus [Fleck et al., 1994] übereinstimmen.

Materialparameter

$\mu=46000$ MPa	$\alpha_1=0,75$
$\nu=0,3$	$\alpha_2=0,25$
$\alpha=3000$ MPa	$\alpha_3=10000$ mm ⁻²
$\beta=0$ N	$\alpha_4=10000$ mm ⁻²
$\gamma=0,01$ N	
$\delta=0$ N	$k_0=70$ MPa

Tabelle 3.1.: Materialparameter aus [Grammenoudis, 2003] für die Elastizitätsgesetze, die Fließfunktion und die Fließgrenze.

Es werden drei Verfestigungsfälle untersucht:

1. Reine isotrope Verfestigung:

Materialparameter:

$$\beta^{iso}=9, \gamma^{iso}=2400 \text{ MPa.}$$

2. Reine kinematische Verfestigung:

Materialparameter:

$$c_1=0 \text{ MPa, } c_2=800 \text{ MPa, } c_3=100 \text{ MPa, } c_4=0 \text{ N, } c_5=0,0001 \text{ N, } c_6=0 \text{ N,}$$

$$b_1=b_2=0,002 \text{ MPa}^{-1}, b_{c_1}=b_{c_2}=0,002 \text{ mm/N.}$$

3. Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung:

Materialparameter:

$$\beta^{iso}=16, \gamma^{iso}=700 \text{ MPa } c_1=0 \text{ MPa, } c_2=600 \text{ MPa, } c_3=80 \text{ MPa, } c_4=0 \text{ N, } c_5=0,0001 \text{ N, } c_6=0 \text{ N,}$$

$$b_1=b_2=0,0025 \text{ MPa}^{-1}, b_{c_1}=b_{c_2}=0,0025 \text{ mm/N}$$

Probegeometrien

Probe	Durchmesser [μm]	Höhe [μm]
1	12	6
2	15	7,5
3	20	10
4	30	15
5	170	85

Tabelle 3.2.: Probegeometrien bei der Torsion.

3.2 Das Experiment: Einfache Torsion eines Kreiszylinders

Es wird eine kreiszylindrische Probe unter Torsionsbeanspruchung betrachtet. Die Verdrehung erfolgt an ihrem oberen Ende mit vorgegebenen Winkel $\Delta\Phi$, während an dem unteren Ende eine feste Einspannung vorliegt. Die Länge des Vollzylinders bleibt während der Deformation konstant (l_0) und die innere Rotation (Rotation des Mikrokontinuums) wird der äußeren Rotation gleichgesetzt. An der Mantelfläche werden Spannungs- und Momentenspannungsvektor gleich Null gesetzt. Die Abbildung 3.2 zeigt den Einfluss des Radiuses auf das mechanische Verhalten. Die dargestellte Scherung ist durch $\gamma_a = \vartheta r_a$ definiert, wobei $\vartheta = \Delta\Phi/l_0$ die Drillung darstellt ($\Delta\Phi$: Winkeländerung am obigen Kreis des Zylinders, l_0 : Probe Anfangslänge in Abbildung 3.1). Aus Abbildung 3.2 ist anschaulich, dass das Verhältnis M/r_a^3 bei konstantem γ_a in einer invers-proportionalen Abhängigkeit zu dem Radius ist: es nimmt zu, während die Radiusgröße sich verkleinert und umgekehrt.

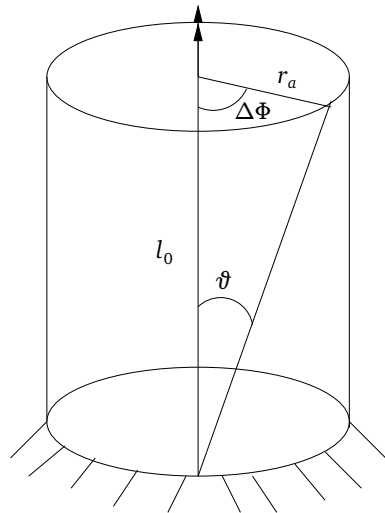


Abbildung 3.1.: Skizze für die Beschreibung des Experimentes.

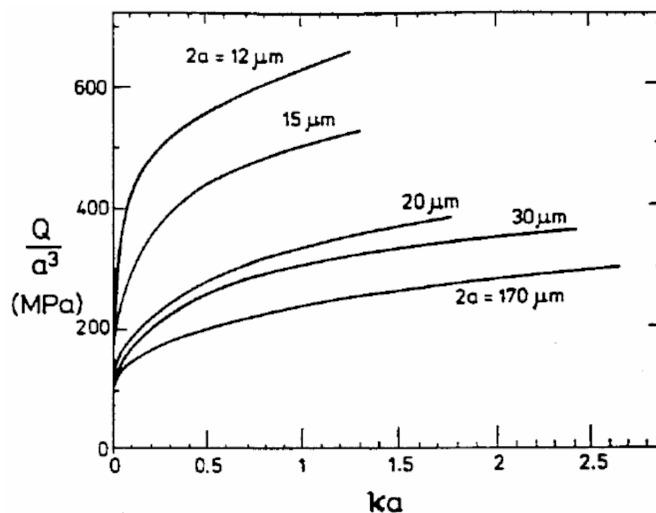


Abbildung 3.2.: Das Verhältnis $M/r_a^3 = Q/a$ als Funktion der Scherung γ_a für Torsionsproben aus Kupfer mit verschiedenen Durchmessern nach [Fleck et al., 1994] (Q, a, k aus [Fleck et al., 1994] entsprechen in dieser Thesis M, r_a, ϑ).

3.2.1 Modellierung

Verwendet wird folgendes Netz:

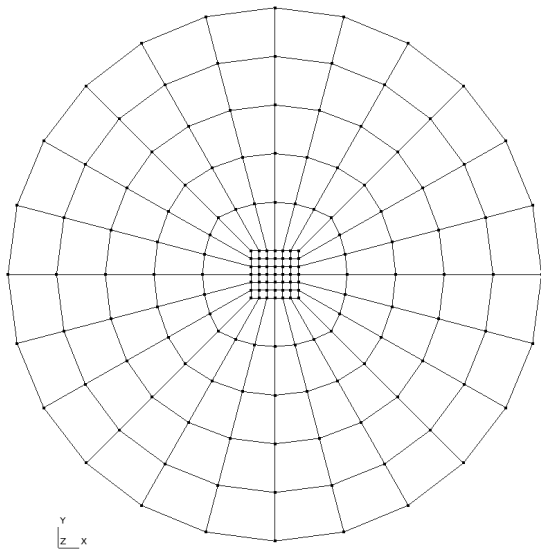


Abbildung 3.3.: Grundfläche des Zylinders.

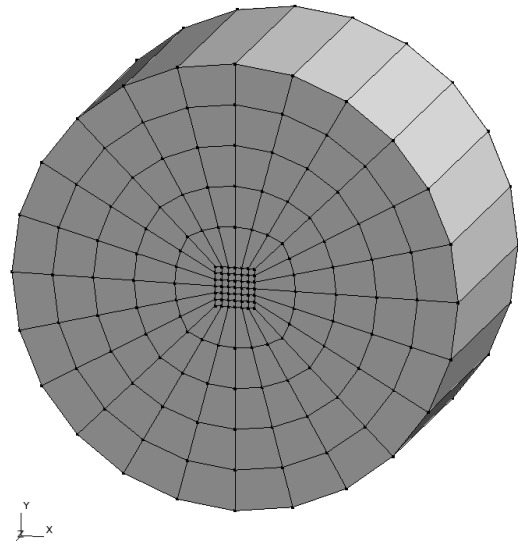


Abbildung 3.4.: 3D-Modell des Zylinders.

Unterschied zu dem von [Grammenoudis, 2003] gewählten Modell

Die Entscheidung zwei Ebenen zu wählen ist ein bedeutsamer Unterschied zwischen dieser Arbeit und die von [Grammenoudis, 2003] bearbeitetes Modell. Grund dafür ist die inhomogene Deformation die bei der Addition zusätzlicher Ebenen auftritt. In Abbildung 3.5 ist zu beachten, dass die Verteilung und Richtung der vertikalen Linien nach der Torsion nicht parallel bleibt. Man erkennt dagegen s-förmigen Linienelemente, die die obigen und untere Grundfläche der Proben durch die Randknoten der verschiedenen Ebenen verbinden.

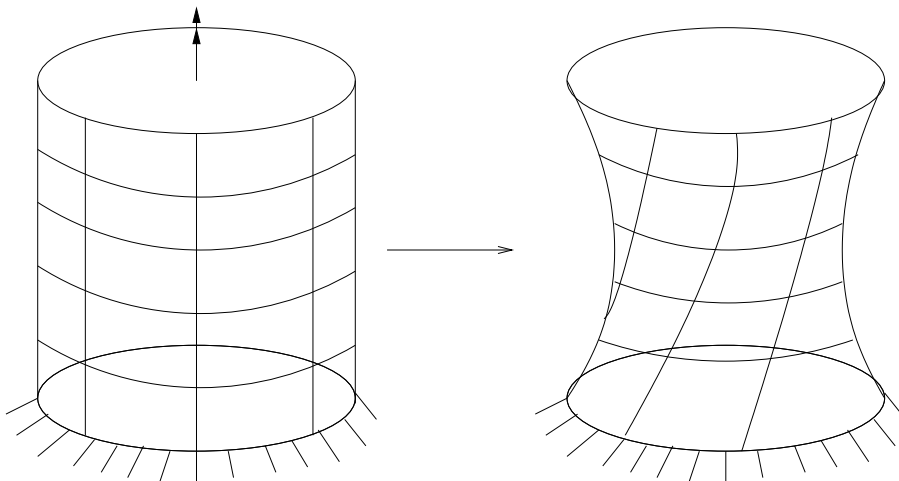


Abbildung 3.5.: Inhomogene Deformation bei der Torsionbeanspruchung.

Bei einer Simulation mit einem Modell mit zwei Knoten in z-Richtung wird eine inhomogene Deformation vermieden. Hier wird eine einfache Torsion (was Ziel des Modells in dieser Thesis ist) ermöglicht. Die Linienelemente bleiben bei dieser Vernetzung parallel zueinander und werden nicht mit dem Körper deformiert. Die deformierte Knotenverteilung ist in Abbildung 3.6 zu beobachten. Die weißen Linien stellen das Netz vor dem Beginn der Beanspruchung dar, während der schwarzen Linien die deformierten Linienelementen zeigen.

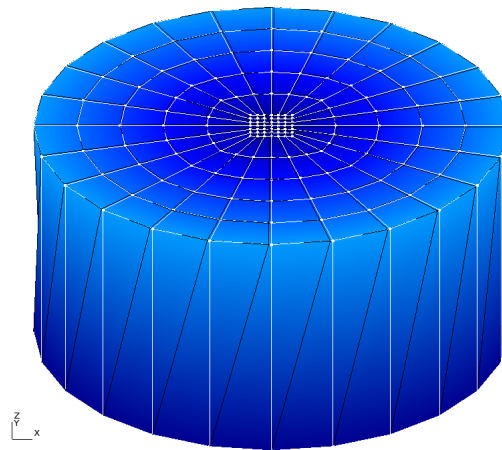


Abbildung 3.6.: Einfache Torsion der Probe 1 bei $\gamma_a = 0.25$.

Randbedingungen

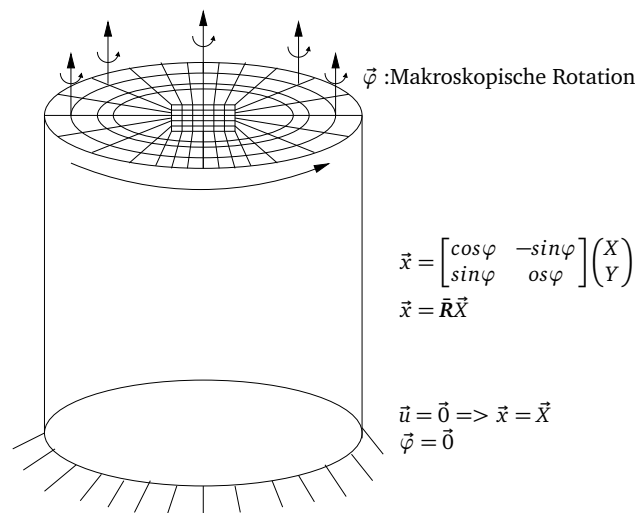


Abbildung 3.7.: Randbedingungen für die untere Grundfläche und die obere Grundfläche des Zylinders.

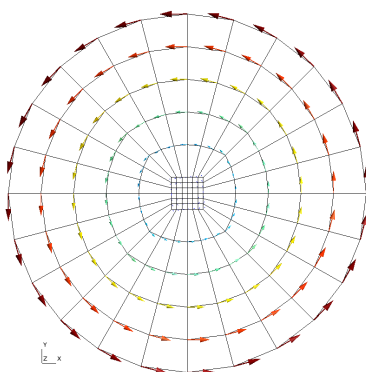


Abbildung 3.8.: Randbedingungen der makroskopischen Rotation an die obere Grundfläche.

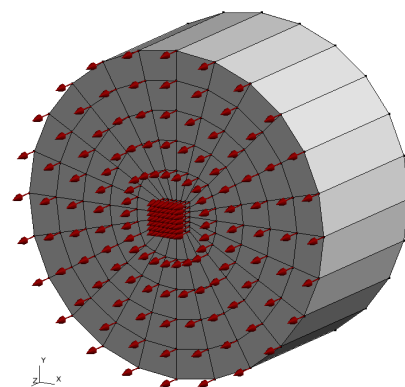


Abbildung 3.9.: Randbedingung der mikropolaren Rotation an den Knoten am Anfang der Torsion.

3.3 Preprocessing: Elmer Finite-Elemente-Methode-Programm

Die numerische Berechnung erfolgt mit Hilfe vom Elmer FEM Programm. Die Simulation und Modellierung werden mit einem von Dr.-Ing. Carsten Bröse eigenhändig erstellten Programm (**makefile** aus Anhang B.1.1) bearbeitet. Die **makefile**-Datei erstellt den Rahmen für die Simulation. Sie beinhaltet vier Befehle: *all*, *zyl*, *sim* und *plot*. Man generiert mit dem Programm Elmer Grid das Netz mit dem Befehl *make zyl* und man kann die Simulation in Xterm mit *make sim* anfangen. Durch die Ausführung von *make sim* generiert man die Ergebnisdatei **rot_zylinder_meshout.msh**, die man mit dem Postprocessing-Programme bearbeitet. Die Simulation erfolgt durch die Ausführung der in Kapitel 2 vorgestellte Formulierung der Thesis. Die grundlegenden Gleichungen werden in den Dateien **mysolver.f90** und **modell.f90** beschrieben, die im **makefile** ersten Zeile unter dem *make all*-Befehl sind. Die in **mysolver.f90** dargestellte Gleichungen werden mit Hilfe der Solver Input File (.sif Datei in B.1.2) ausgeführt. Nach [Lyly, 2017] besteht ein .sif Datei aus elf Teilen, wie in Tabelle 3.3 beschrieben.

N°	Abschnitt	Aufgabe
1	Titel	Standort der .msh Dateien (mit der Netzinformation)
2	Simulation	Generellen Informationen: Koordinatensystem, Output-Datei, Iterationen
3	Konstanten	Konstantendefinition
4	Körper n	Zusammen mit 5, 6, 7, 8, 9,10 und 11 durch n verknüpft
5	Material n	Zusammen mit 4, 6, 7, 8, 9,10 und 11 durch n verknüpft
6	Körperkräfte n	Zusammen mit 4, 5, 7, 8, 9,10 und 11 durch n verknüpft
7	Gleichung n	Zusammen mit 4, 5, 6, 8, 9,10 und 11 durch n verknüpft
8	Gleichungsaflöser n	Zusammen mit 4, 5, 6, 7, 9,10 und 11 durch n verknüpft
9	Rahmenbedingungen n	Zusammen mit 4, 5, 6, 7, 8, 10 und 11 durch n verknüpft
10	Anfangsbedingungen n	Zusammen mit 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 11 durch n verknüpft
11	Komponentenbedigungen n	Zusammen mit 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 durch n verknüpft

Tabelle 3.3.: Abschnitte in einer .sif Datei und ihre Aufgaben. n ist mit dem Abschnittnamen verknüpft.

3.4 Programme für das Postprocessing

Die Ergebnisse aus dem Elmer Solver werden durch die folgenden Programme bearbeitet, um aussagekräftige Grafiken der gewollten Verhältnisse zu bekommen.

3.4.1 Gmsh

Mit dem Programm Gmsh kann man die generierten Netze und die verschiedenen Ergebnisse aus der numerischen Berechnung sichtbar machen. Man sucht die Spannung σ_{zz} von der Mitte der oberen Grundfläche $(0,0,h)$ zum rechten Ende $(r,0,h)$, wobei r der Radius und h die Höhe des Zylinders sind. Mit Hilfe des Benutzerhandbuchs [Geuzaine and Remacle, 2015] zeigt man im Gmsh-Display nur die obere Grundfläche des Zylinders (Abbildung 3.3) an. Man wählt hier aus den Spannungen $stress_{zz}$ aus und ändert bei Optionen die Displayarte von *continous-map* zu *numeric values*, um die Spannungswerte zu sehen. Man benutzt diese Werte, um die mit der durch Awk-Programme gewonnenen Ergebnisse zu kontrastieren.

3.4.2 Awk

Mit Hilfe von [Barlow et al., 1995], [Birnthaler, 2016] und [Close et al., 1993] schreibt man die Programme von Awk für das Postprocessing. Man benutzt die 5 Awk-Programme aus Anhang C.1 auf die **rot_zylinder_meshout.msh**-Dateien, um am Ende eine Textdatei **proggnu** zu bekommen, die dann für die grafische Darstellung mit Gnuplot benutzt wird:

- Das erste Programm C.1.1 sortiert die Punkte (x, y, z) die man sucht, mit $0 \leq x \leq r$ (Werte zwischen der Mitte und dem Radius), $y = 0$ und $z = maxz$ (Höhe des Zylinders). Die Knotennummer und x-Wert gehen auf die Textdatei **prog**. Dann sucht man die Spannungen σ_{zz} und speichert die auf Textdatei **prog2** und die Scherungen, die wiederholt sein können, auf **prog3**.

- Das zweite Programm C.1.2 sortiert die x-Werte von **prog** und speichert die auf **progs**.
- Das dritte Programm C.1.3 ordnet die x-Werte der gewonnenen Knoten im Verhältnis zum Radius (r) der Probe zu (x/r) sodass die Verläufe präziser werden (siehe Tabelle 3.4 und Abbildung 3.10, wobei die betrachteten Knoten von einer roten Ellipse umkreist sind).
- Das vierte Programm C.1.4 speichert die Scherungen γ_a die nicht wiederholt sind auf **proggraf**.
- Das fünfte Programm C.1.5 speichert die Scherung und die zugehörigen Spannungen σ_{zz} auf **proggraf** ohne die von drittem Programm Scherungen γ_a zu löschen.
- Das sechste Programm C.1.6 speichert Scherung und die dazugehörigen Spannungen in Datenblöcken auf **prognu**.

Knoten	Radius-Anteil
K1	$r * 0.000$
K2	$r * 0.029$
K3	$r * 0.059$
K4	$r * 0.088$
K5	$r * 0.270$
K6	$r * 0.453$
K7	$r * 0.635$
K8	$r * 0.818$
K9	$r * 1.000$

Tabelle 3.4.: Betrachteten Knoten und ihre Verhältnisse zum Radius.

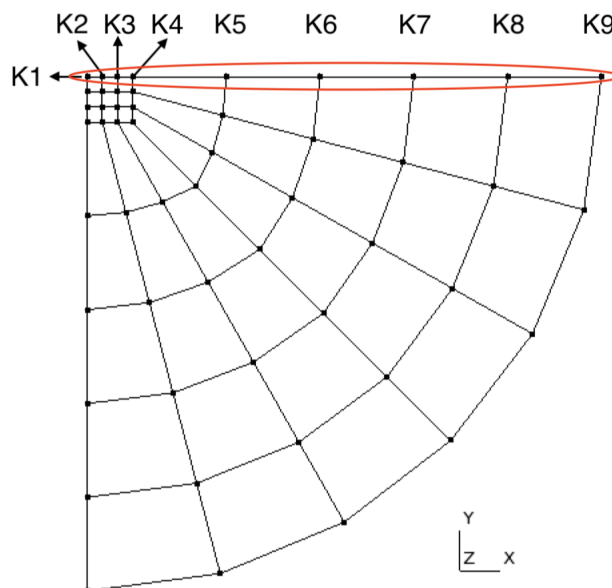


Abbildung 3.10.: Knoten, die betrachtet werden.

Am Ende erhält man eine Textdatei, wo die Ergebnisse so dargestellt sind:

$\gamma=0.001$		
Radius	Nodes	Stress_zz
0	20	-3.0961585E-002
1	31	-3.0961585E-002
0.0883883	32	-3.0961585E-002
0.817678	153	-3.0961585E-002
0.635355	154	-3.0961585E-002
0.453033	155	-3.0961585E-002
0.27071	156	-3.0961585E-002
0.0294628	177	-3.0961585E-002
0.0589255	178	-3.0961585E-002

$\gamma=0.002$		
Radius	Nodes	Stress_zz
0	20	-7.0769473E-002
1	31	-7.0769473E-002
0.0883883	32	-7.0769473E-002
0.817678	153	-7.0769473E-002
0.635355	154	-7.0769473E-002
0.453033	155	-7.0769472E-002
0.27071	156	-7.0769473E-002
0.0294628	177	-7.0769473E-002
0.0589255	178	-7.0769472E-002

Abbildung 3.11.: Ergebnisbeispiel nach der Awk-Bearbeitung der `rot_zylinder_meshout.msh`-Dateien.

3.4.3 Gnuplot

Mit Hilfe der Bedienungsanleitung von Gnuplot 5.0 [Williams et al., 2015] schreibt man Gnuplot-Programm C.2.2, um die Ergebnisse bei Postprocessing darzustellen. Die Ausführung von B.1.1 *make sim* kann man mit dem Programm aus Anhang C.2.1 mit dem Befehl *make plot* visuell darstellen. Dieser Befehl stellt die $\gamma_a - M/r_a^3$ Kennlinien dar.

Anhang C.2.2 stellt die in der **proggnu** Datei stehende $\vec{r} - \sigma_{zz}$ Kennlinien dar. Man erhält davon die Spannungsverläufe über den Radius verschiedener Scherungen oder die Spannungsverläufe über den Radius mit dem 699. Block, der die Scherung $\gamma_a = 0.7$ entspricht. Man legt die Vernetzung der Grafik mit dem Befehl *set grid* und *show grid* vor und benennt die Axes mit *set xlabel* und *set ylabel*. Für die Darstellung der Ergebnisse benutzt man Liniendiagramme, die mit dem Befehl *smooth unique* ihre x-Werte ihrer Größe nach sortiert.



4 Ergebnisse: Modellvoraussagen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Berechnungen mit Elmer FEM nach dem Postprocessing mit den Programmen Awk und Gnuplot veranschaulicht. Die Simulation erfolgt mit der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ durch 1000 Schritte und die Ergebnisse die dargestellt werden sind: die Torsionsmomentenverläufe für die verschiedenen Verfestigungsfälle als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$; die Spannungsverläufe S_{zz} aller Proben als Funktion des Radius für die Punkte mit $0 \leq x \leq r$, $y = 0$ und $z = h$ (h: Höhe des Zylinders) für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$; und die Spannungsverläufe für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für dieselben Punkten für die Proben 1 bis 5. Die Modellvoraussagen werden mit der Abbildung 3.2 von [Fleck et al., 1994] und die Ergebnisse aus [Grammenoudis, 2003] im Anhang A verglichen.

Die Entscheidung die Verläufe für kleine Scherungen darzustellen $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ und $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ wurde getroffen, weil die zugehörigen Spannungen kleiner sind und deswegen die Unterschiede zwischen Verläufe deutlicher zu erkennen sind.

Berechnung des Torsionsmomentes

Die Berechnung des Torsionsmomentes M bei den Ergebnissen, die mit Hilfe von C.2.1 veranschaulicht wird, erfolgt aus der Gleichung 4.1. Der erste Summand entspricht dem Anteil aus der klassischen Spannung und der zweite, dem Anteil aus der Momentenspannung:

$$M = \int_0^{r_a} T^{<\varphi z>} r dA + \int_0^{r_a} T_c^{<zz>} dA = \int_0^{r_a} T^{<\varphi z>} 2\pi r^2 dr + \int_0^{r_a} T_c^{<zz>} 2\pi r dr. \quad (4.1)$$

Hier ist $dA = 2\pi r dr$, wobei dA die Fläche des Ringes für die Approximation der Zylindergrundfläche am oberen Ende, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, ist. dr entspricht der Radiusdifferenz bei der Approximation. $T^{<\varphi z>}$ ist die klassische Schubspannung, die über die Fläche integriert und mit dem Radius multipliziert wird. $T_c^{<zz>}$ ist die Momentenspannung, die über die Fläche integriert wird.

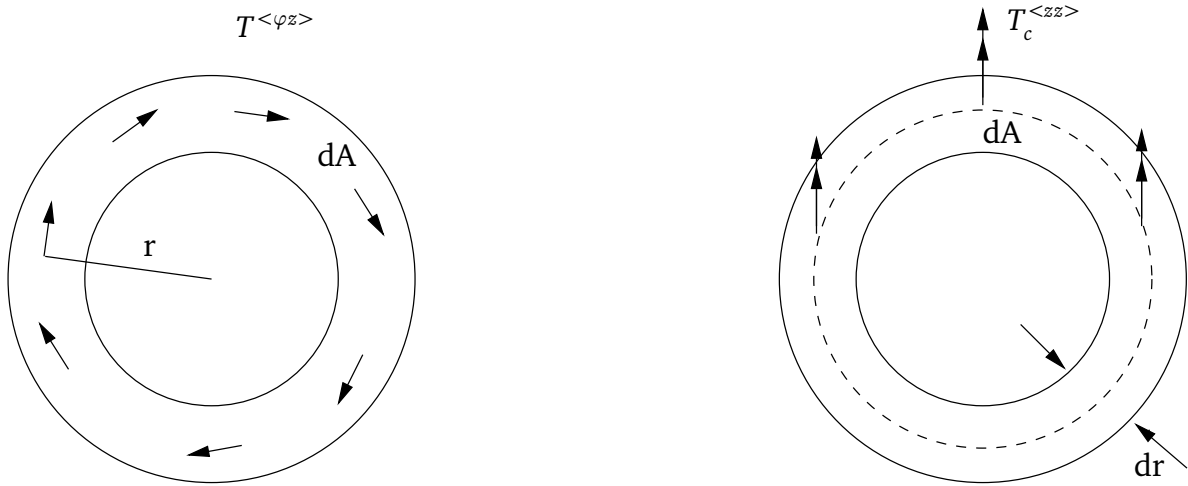


Abbildung 4.1.: Skizze zur Erklärung der Gleichung 4.1.

4.1 Keine Verfestigung

Die Modellvoraussagen für keine Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung sind in Abbildungen 4.2 bis 4.12 zu sehen.

4.1.1 Torsionsmoment

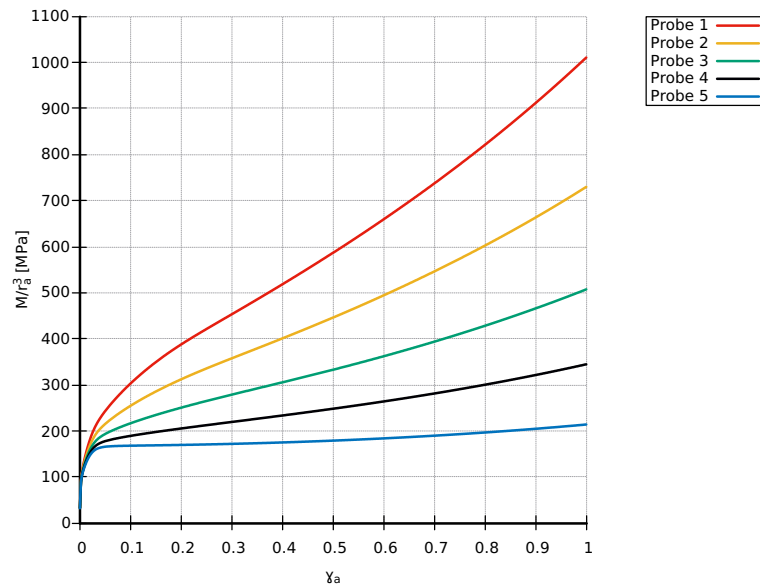


Abbildung 4.2.: Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter keinem Einfluss von Verfestigungen.

4.1.2 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5

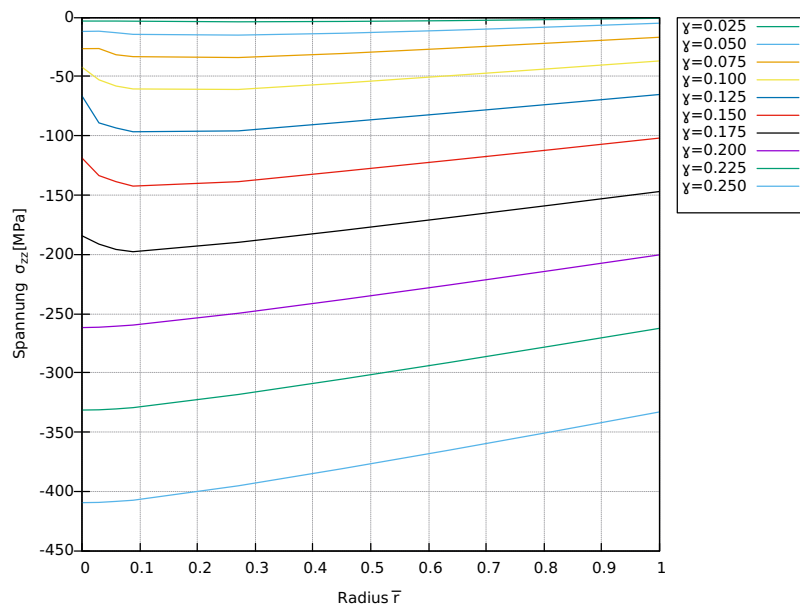


Abbildung 4.3.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1.

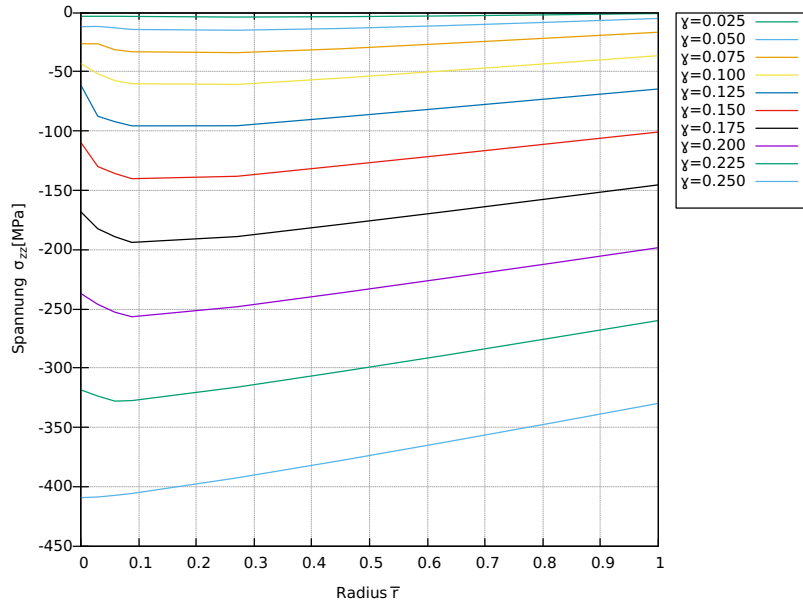


Abbildung 4.4.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2.

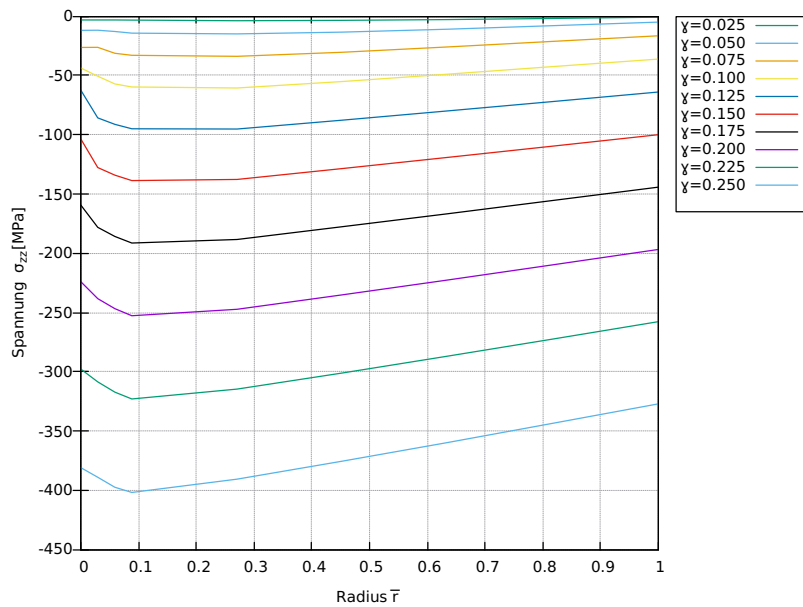


Abbildung 4.5.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3.

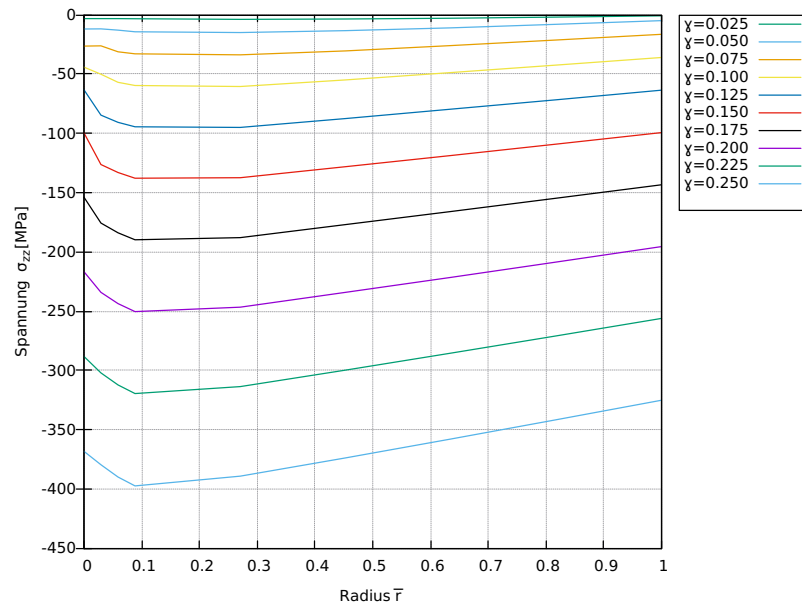


Abbildung 4.6.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4.

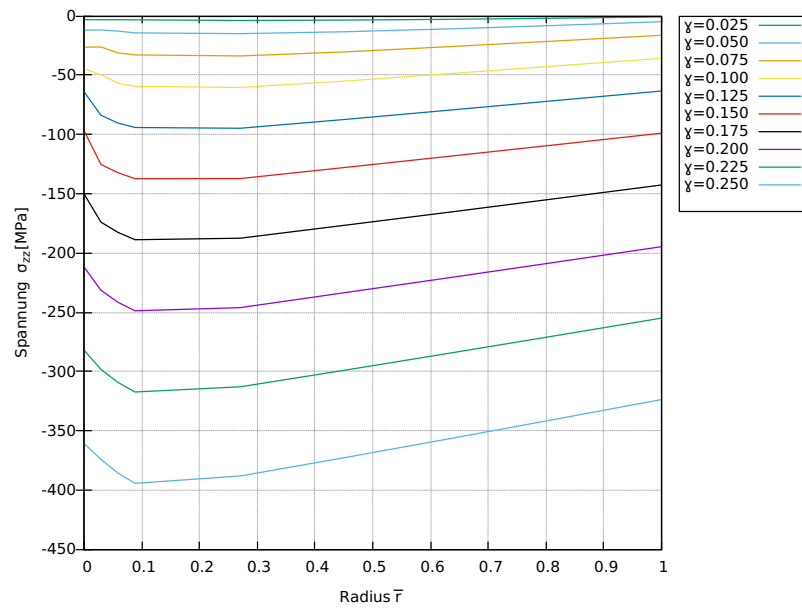


Abbildung 4.7.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5.

4.1.3 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5

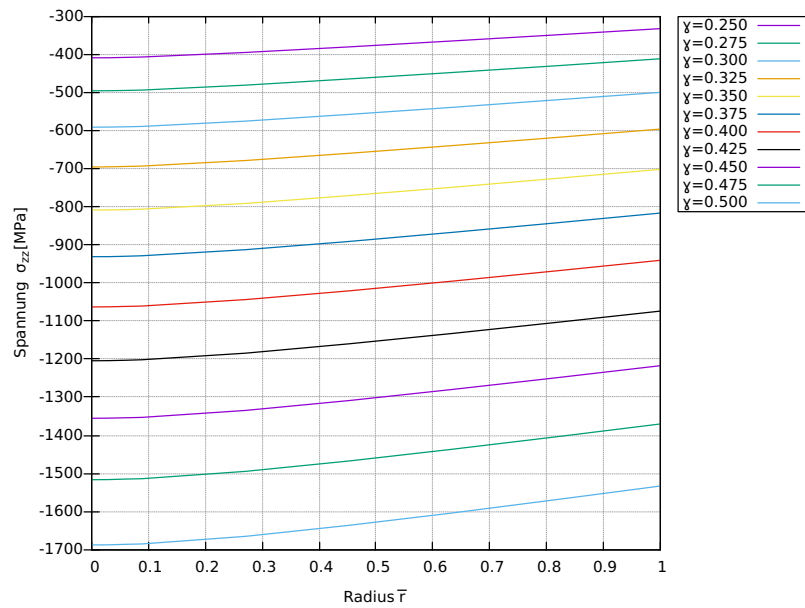


Abbildung 4.8.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1.

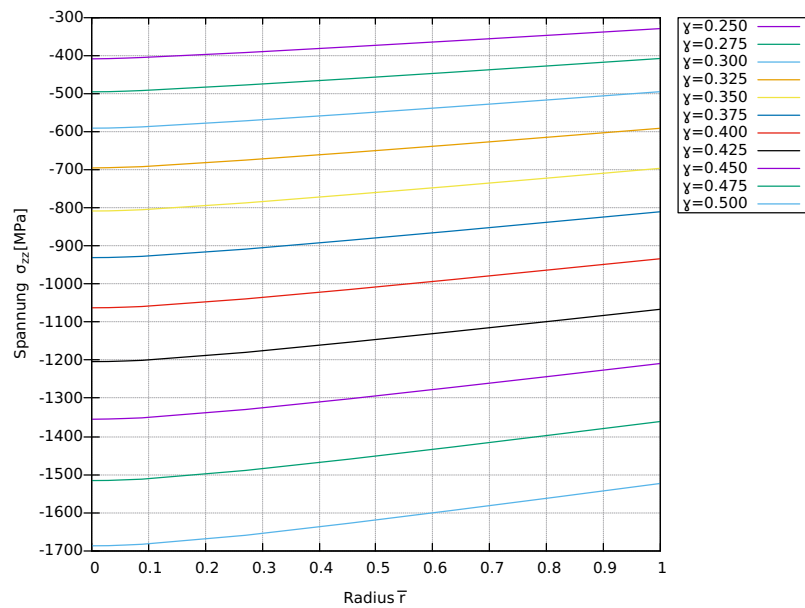


Abbildung 4.9.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2.

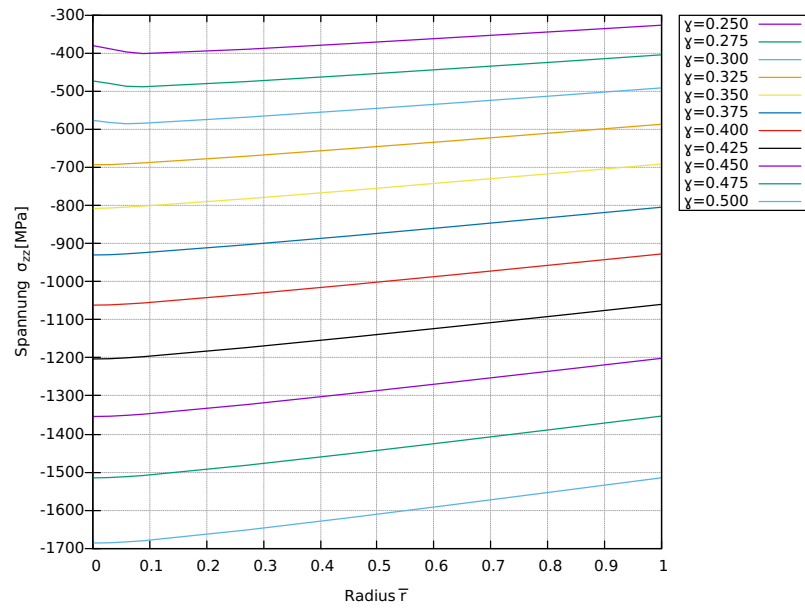


Abbildung 4.10.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3.

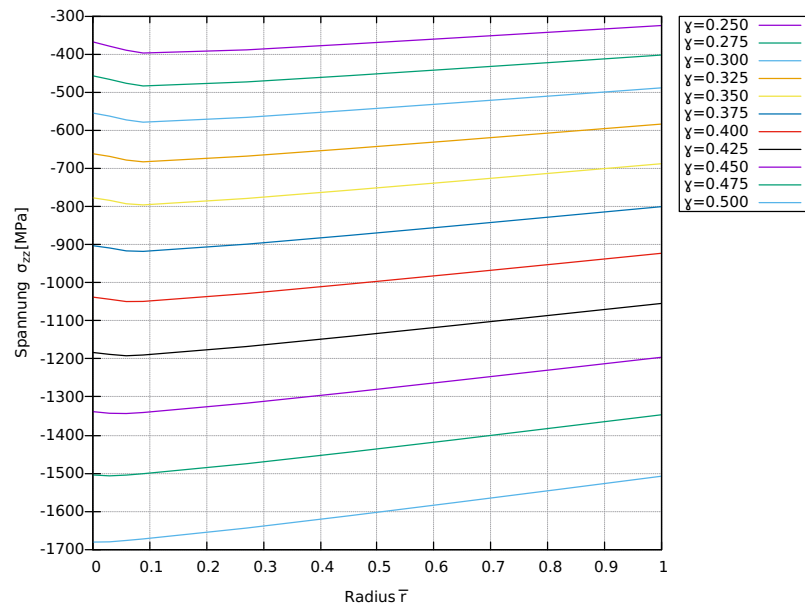


Abbildung 4.11.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4.

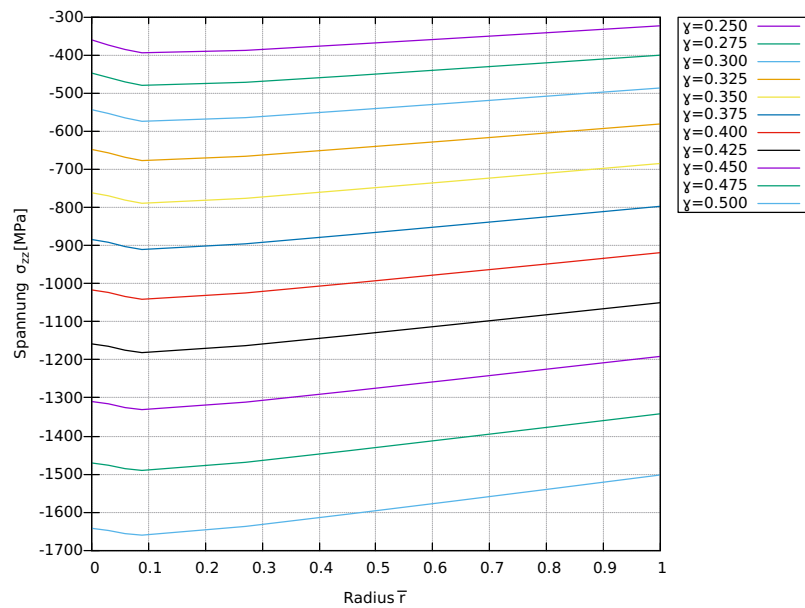


Abbildung 4.12.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5.

Analysis der Ergebnisse

- Das Torsionsmoment M/r_a^3 in Abbildung 4.2 steigt im Bereich $0 \leq \gamma_a \leq 0.025$ sehr stark an. Dann unterscheiden sich die Verläufe der verschiedenen Proben. Probe 1 wächst stärker als Probe 5, welche fast parallel zur x-Achse bis $\gamma_a \approx 0.4$ läuft und dann wieder steigt. Die anderen Proben liegen dazwischen. Interessant ist es zu erkennen, dass die Linien der verschiedenen Proben sich nicht schneiden.
- Im Abschnitt 4.1.2 ist zu bemerken, dass ss die Spannung in der Mitte der Proben ($x = 0$) negativer als die am Rand ($x = r$) der Proben ist.
- Im Abschnitt 4.1.3 wird der Hackenverlauf der σ_{zz} -Kurven deutlicher als im Abschnitt 4.1.2 dargestellt.

4.2 Reine kinematische Verfestigung

Die Modellvoraussagen für reine kinematische Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung sind in Abbildungen 4.13 bis 4.23 zu sehen.

4.2.1 Torsionsmoment

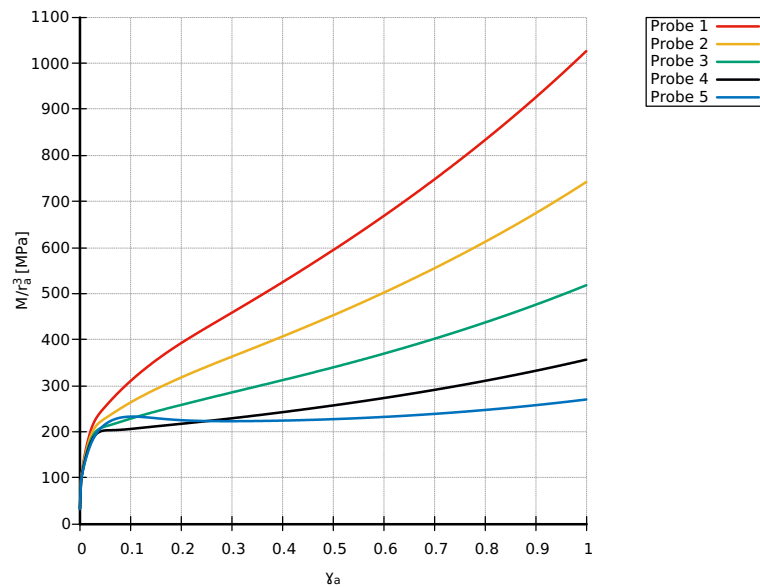


Abbildung 4.13.: Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss von kinematischer Verfestigung.

4.2.2 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5

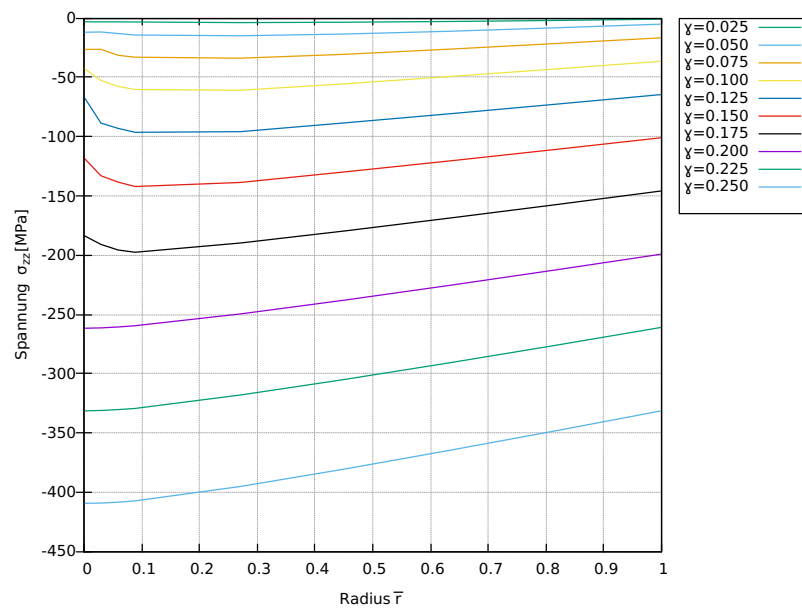


Abbildung 4.14.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1.

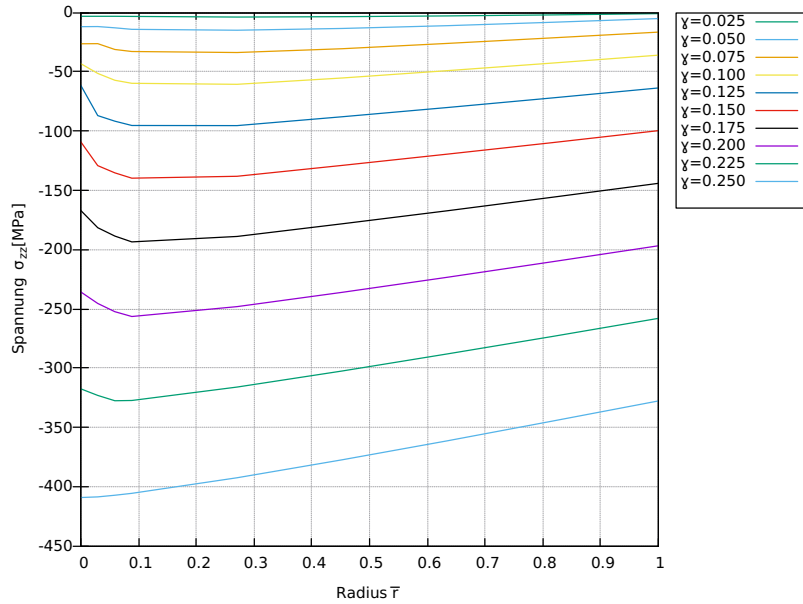


Abbildung 4.15.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2.

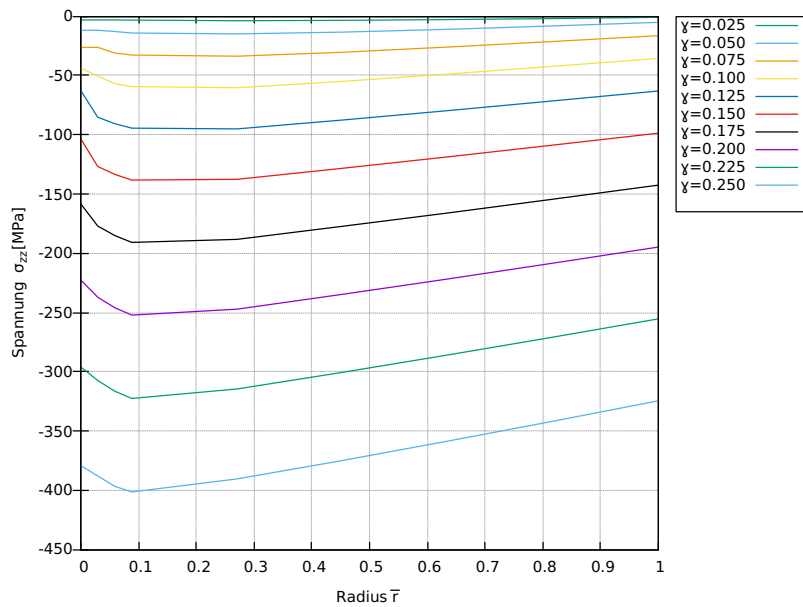


Abbildung 4.16.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3.

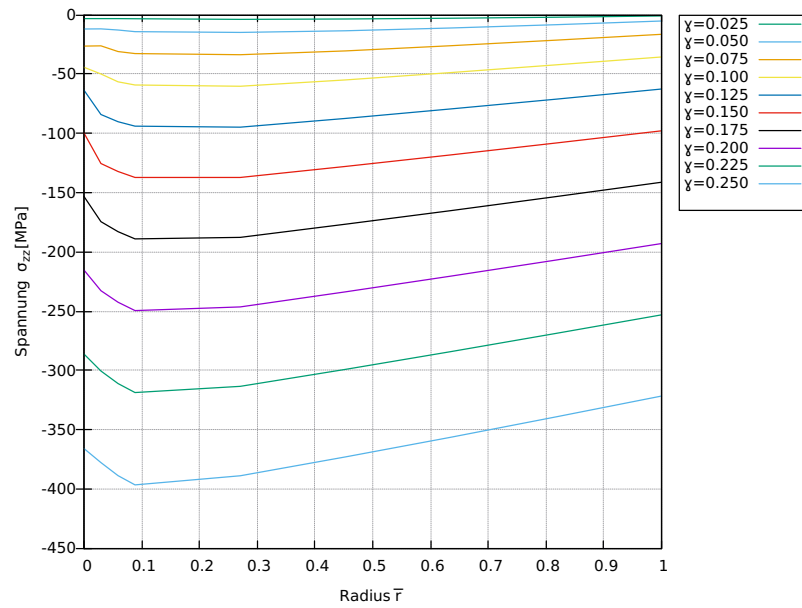


Abbildung 4.17.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4.

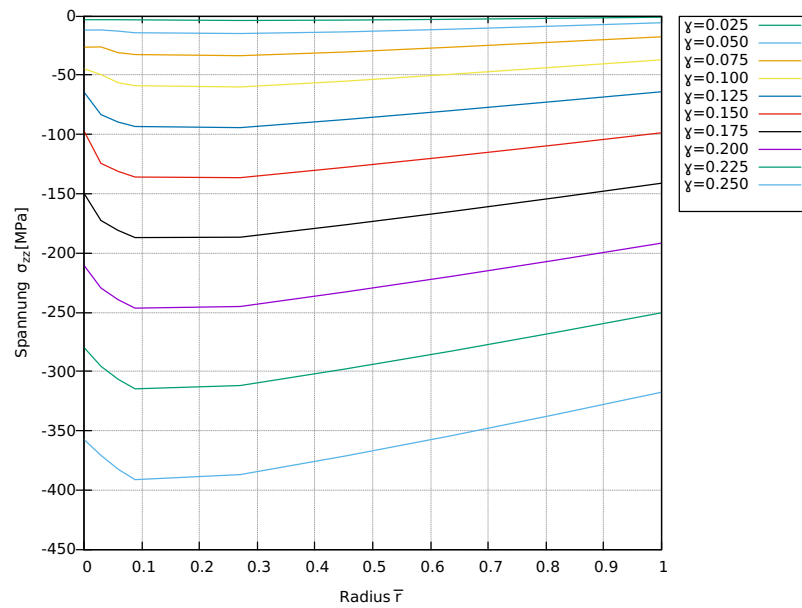


Abbildung 4.18.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5.

4.2.3 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5

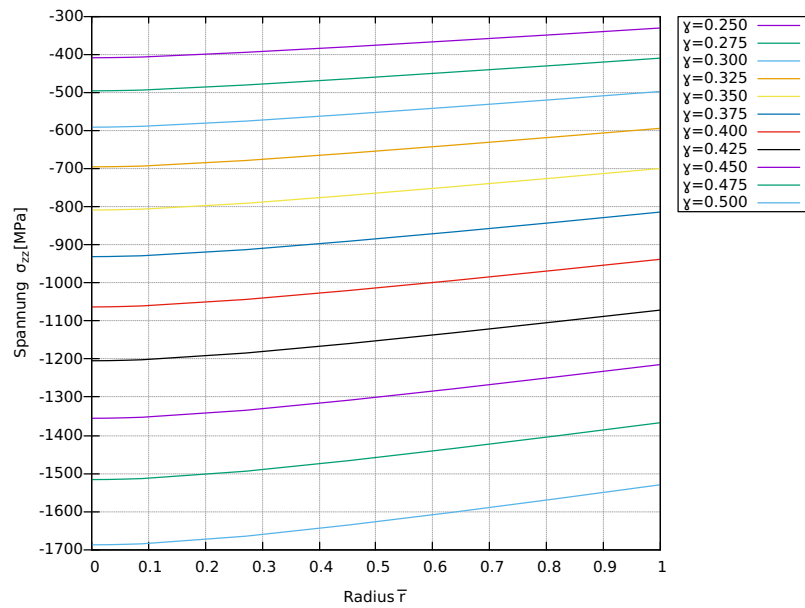


Abbildung 4.19.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1.

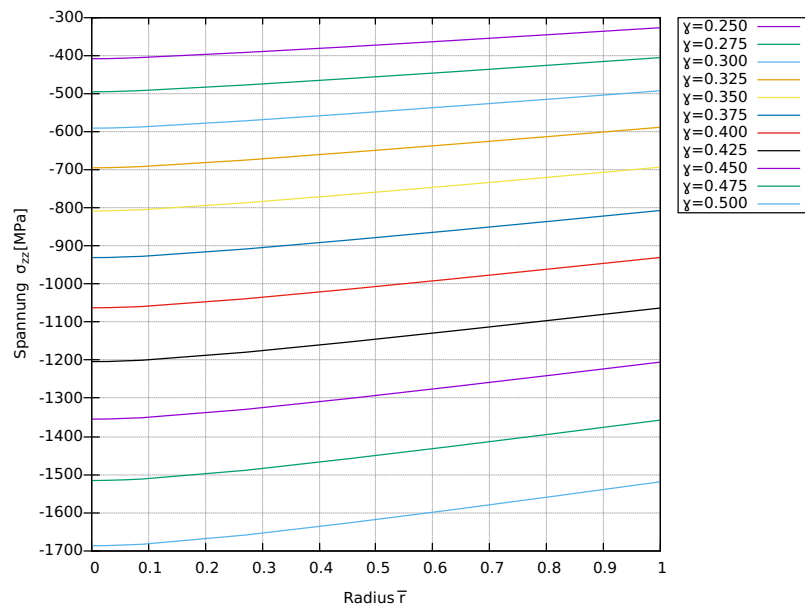


Abbildung 4.20.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2.

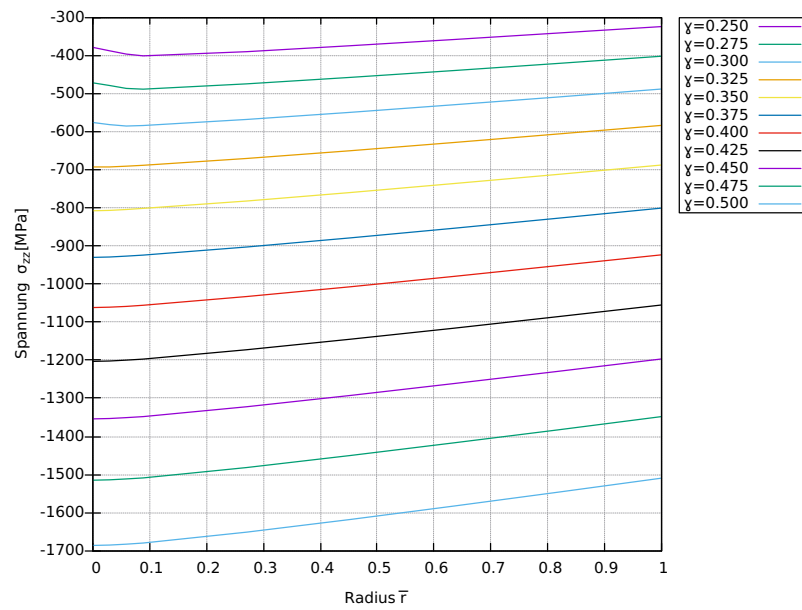


Abbildung 4.21.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3.

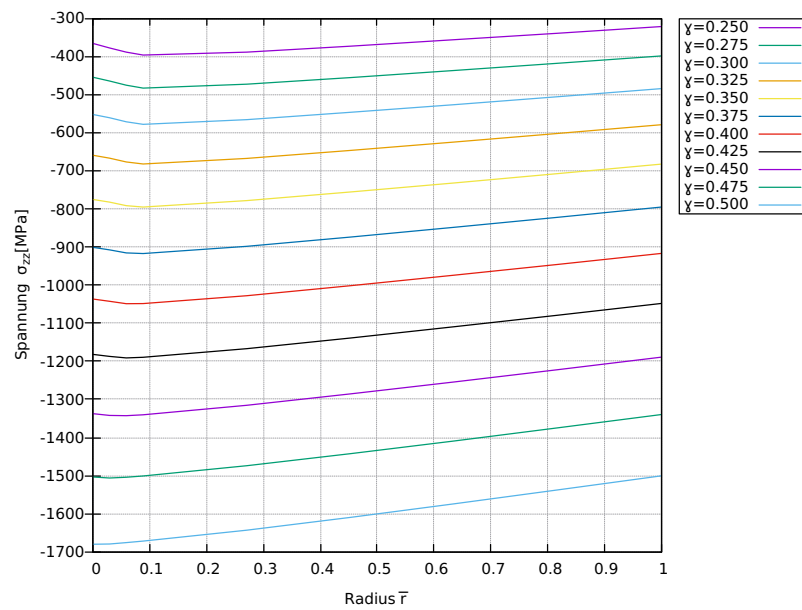


Abbildung 4.22.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4.

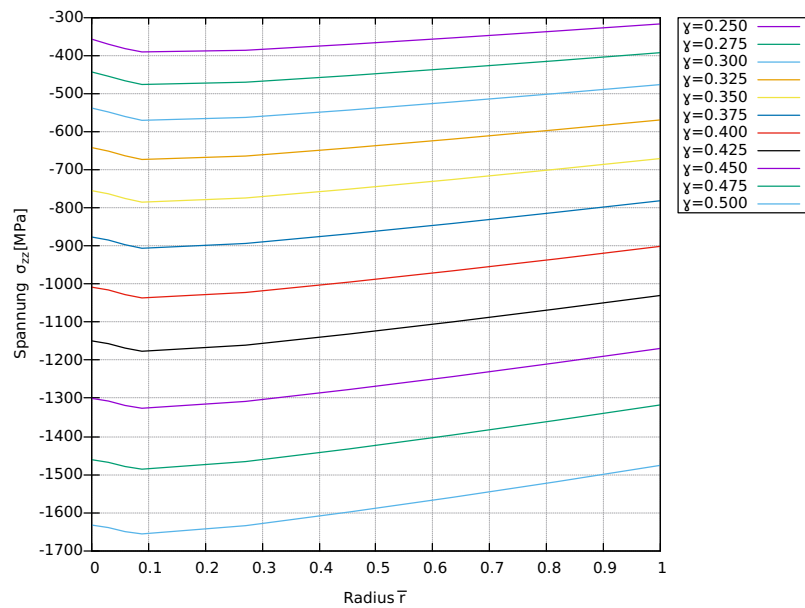


Abbildung 4.23.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5.

Analysis der Ergebnisse

- Im Unterschied zur Abbildung 4.2 nimmt die Abbildung 4.13 größere Werte an. Der größte Unterschied ist aber der Verlauf von Probe 4 und 5. Die Funktion $(\gamma_a, M/r_a^3)$ für Probe 4 steigt bis $r \approx 0.25$ im Vergleich zur Abbildung 4.2. Die Linie für die Probe 5 schneidet zweimal die von der Probe 3 und Probe 4. Probe 3 wird bei $\gamma_a \approx 0.05$ von unten geschnitten und bei $\gamma_a \approx 0.11$ von oben geschnitten. Probe 4-Linie wird von der Probe 5-Linie bei $\gamma_a \approx 0.03$ von unten und bei $\gamma_a \approx 0.25$ von oben geschnitten. Zwischen $\gamma_a \approx 0.11$ und $\gamma_a \approx 0.4$ steigen die Werte der Probe 5-Verlauf ab und dann nehmen sie wieder zu. Die Werte bei Proben 1, 2 und 3 nehmen steigen kontinuierlich zu.
- Im Abschnitt 4.2.2 ist zu bemerken, dass die Spannung in der Mitte der Proben ($x = 0$) negativer als die am Rand ($x = r$) der Proben ist.
- Im Abschnitt 4.2.3 wird der Hackenverlauf der σ_{zz} -Kurven deutlicher als im Abschnitt 4.2.2 dargestellt.

4.3 Reine isotrope Verfestigung

Die Modellvoraussagen für reine isotrope Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung sind in Abbildungen 4.24 bis 4.34 zu sehen.

4.3.1 Torsionsmoment

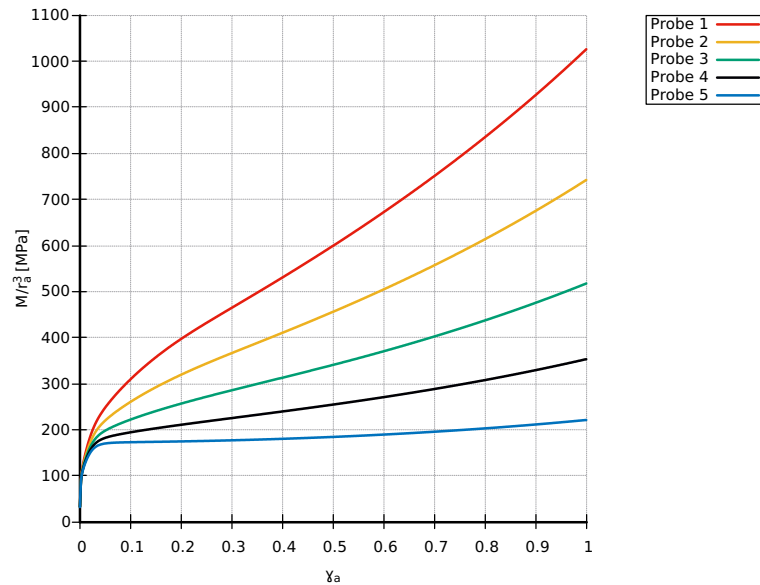


Abbildung 4.24.: Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss von isotroper Verfestigung.

4.3.2 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5

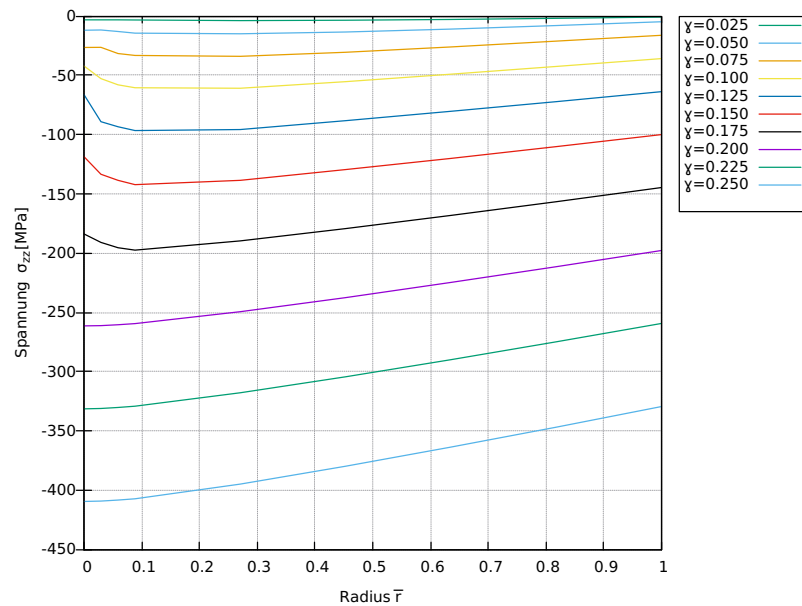


Abbildung 4.25.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1.

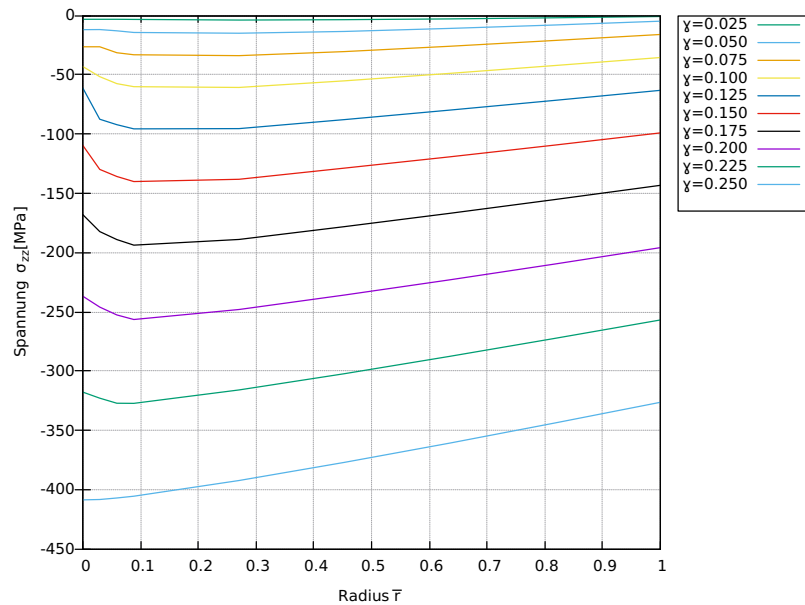


Abbildung 4.26.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2.

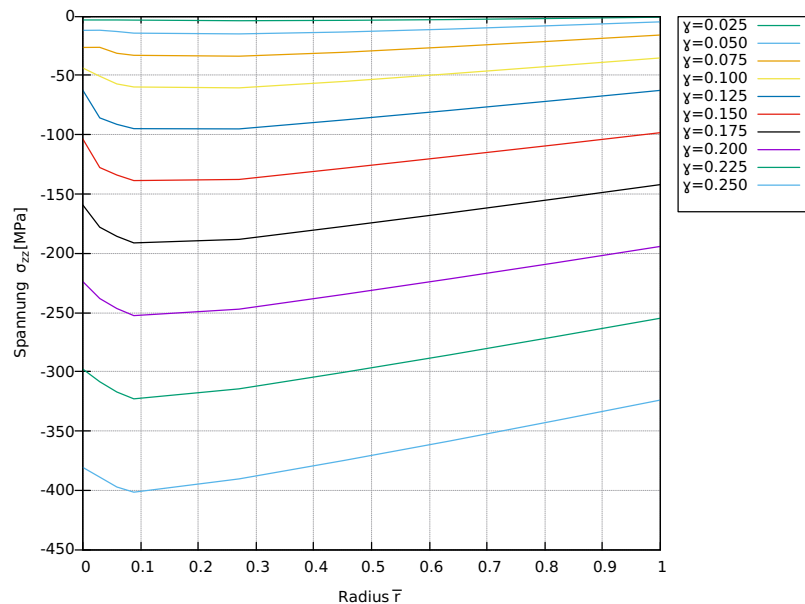


Abbildung 4.27.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3.

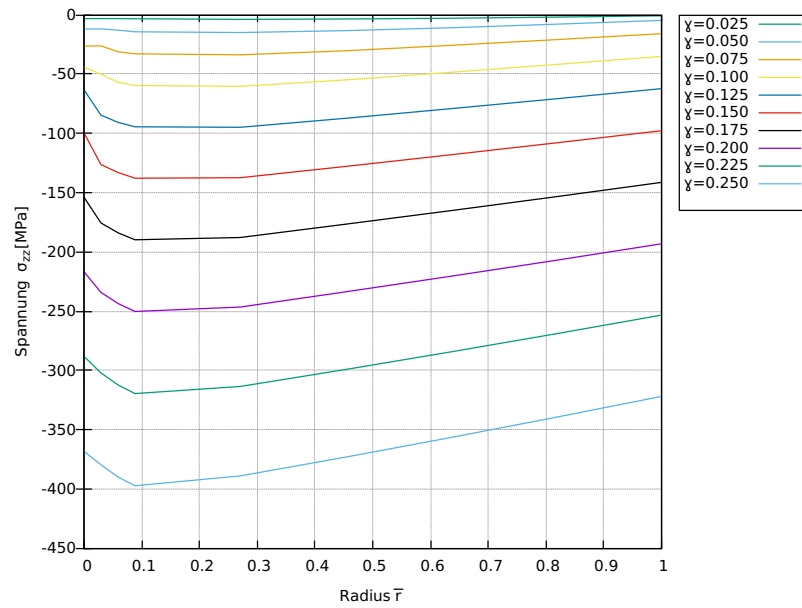


Abbildung 4.28.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4.

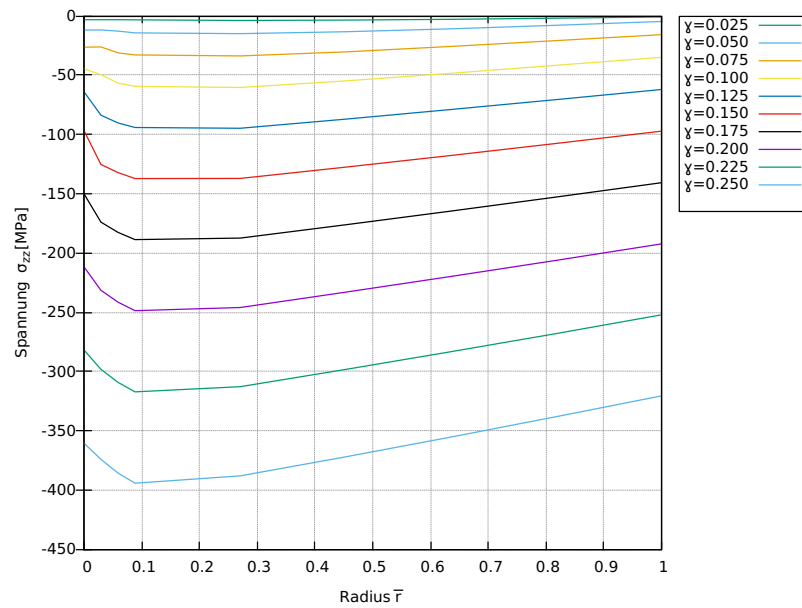


Abbildung 4.29.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5.

4.3.3 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5

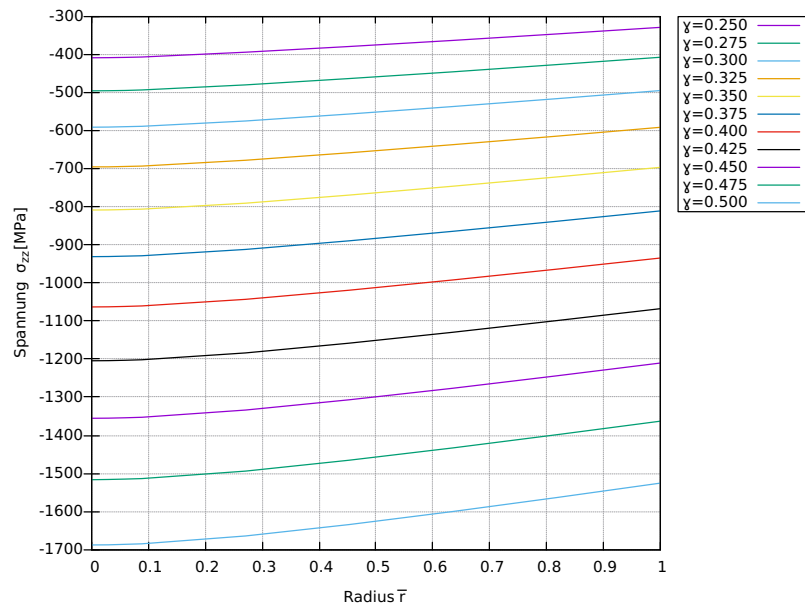


Abbildung 4.30.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1.

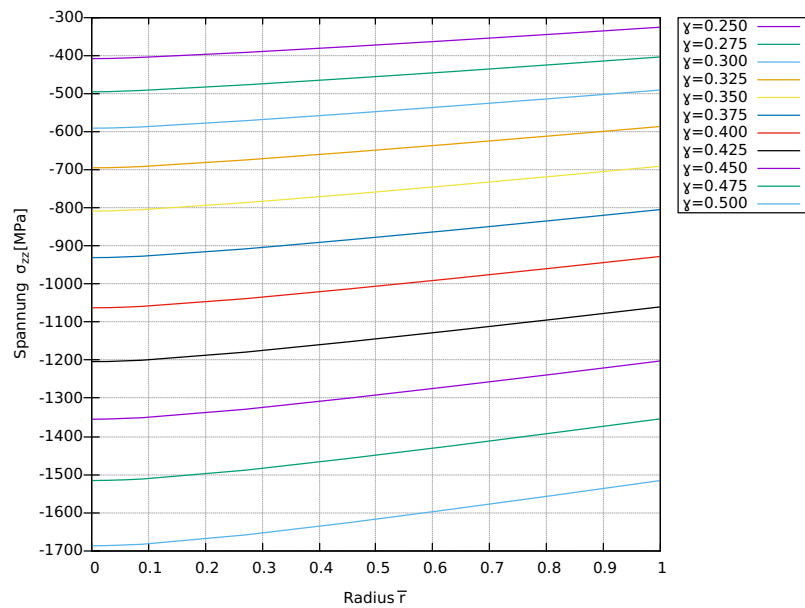


Abbildung 4.31.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2.

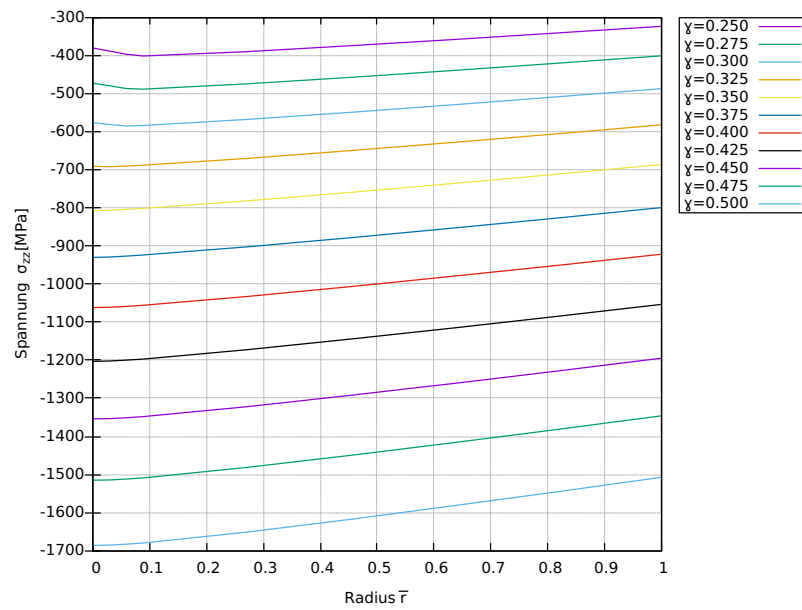


Abbildung 4.32.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3.

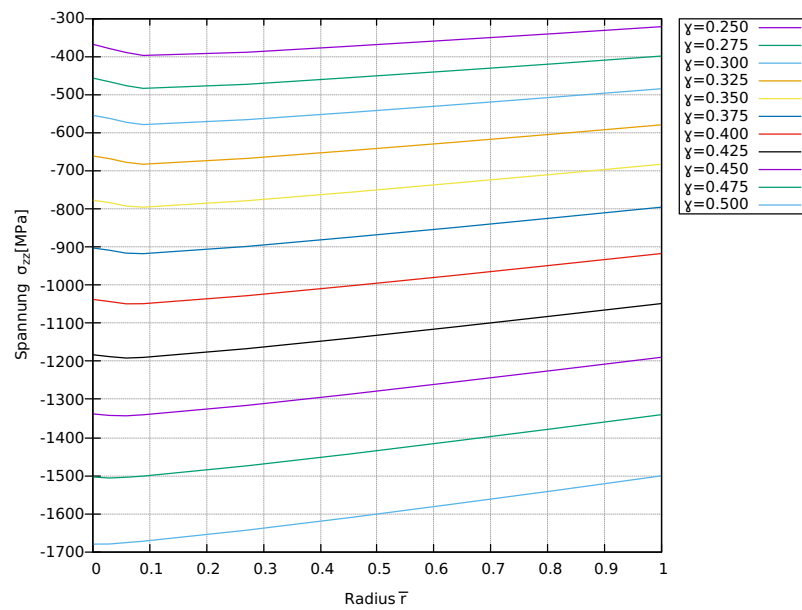


Abbildung 4.33.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4.

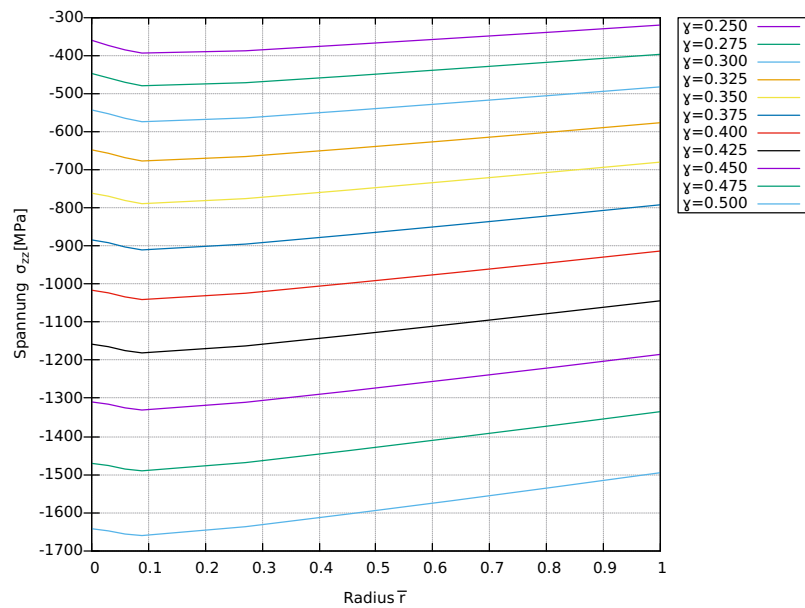


Abbildung 4.34.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5.

Analysis der Ergebnisse

- Bei Abbildung 4.24 ist es zu merken, dass die Linien ähnlich als die von Abbildung 4.2 verlaufen, aber mit größeren M/r_a^3 -Werte.
- Im Abschnitt 4.3.2 ist zu bemerken, dass die Spannung in der Mitte der Proben ($x = 0$) negativer als die am Rand ($x = r$) der Proben ist.
- Im Abschnitt 4.3.3 wird das Hackenverlauf der σ_{zz} -Kurven deutlicher als im Abschnitt 4.3.2 dargestellt.

4.4 Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung

Die Modellvoraussagen für eine Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung während der Torsionsbeanspruchung sind in Abbildungen 4.35 bis 4.45 zu sehen.

4.4.1 Torsionsmoment

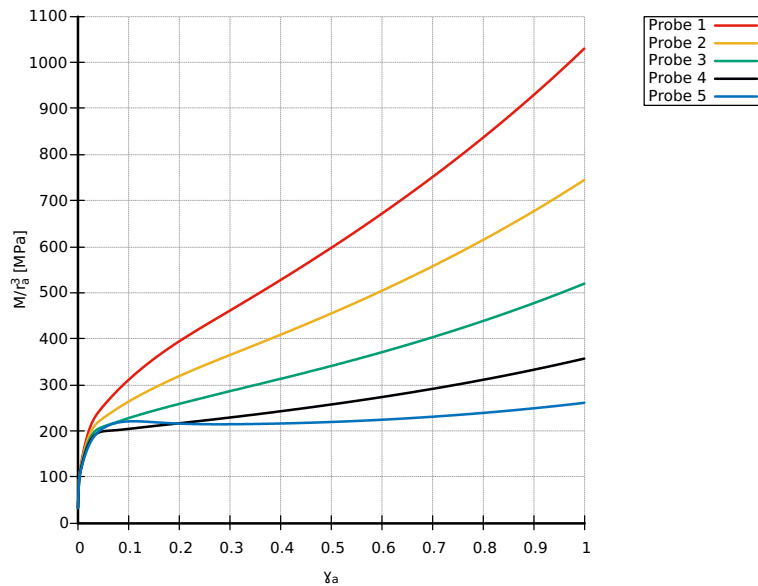


Abbildung 4.35.: Torsionsmoment als Funktion der Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss von kinematischer und isotroper Verfestigung.

4.4.2 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Proben 1 bis 5

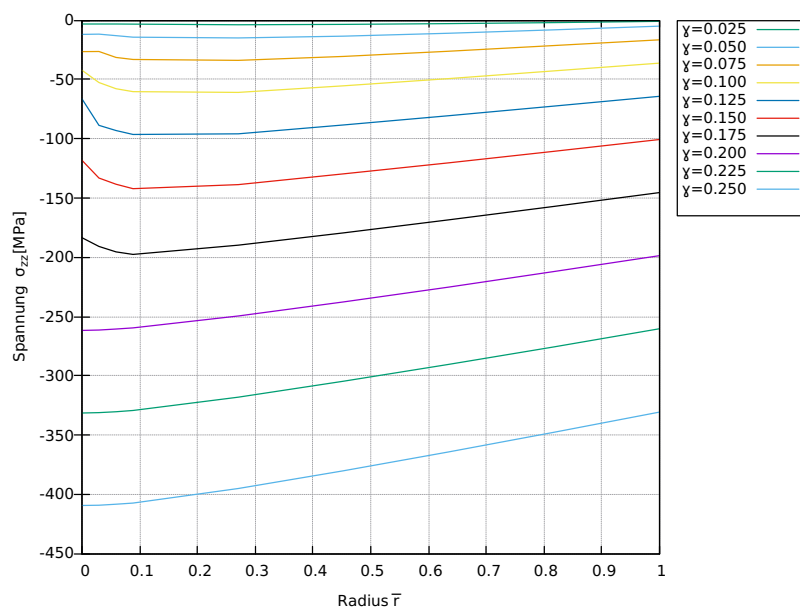


Abbildung 4.36.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 1.

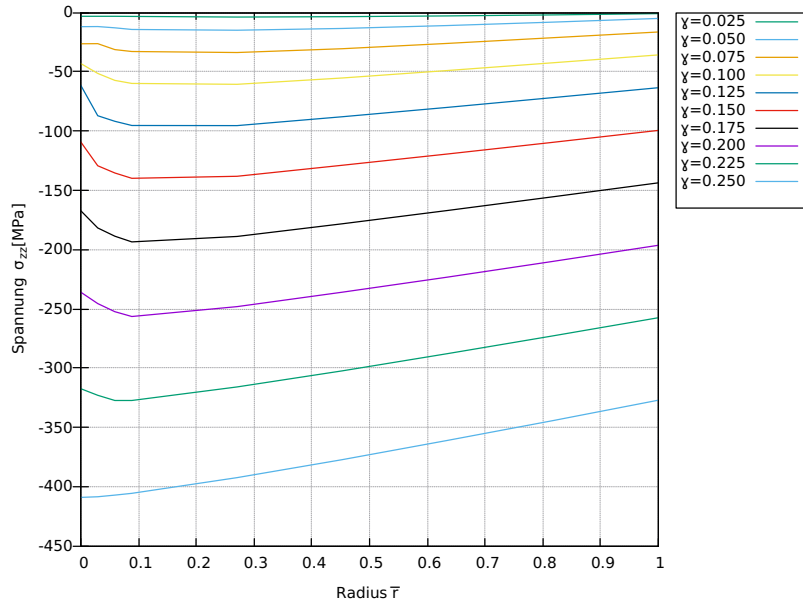


Abbildung 4.37.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 2.

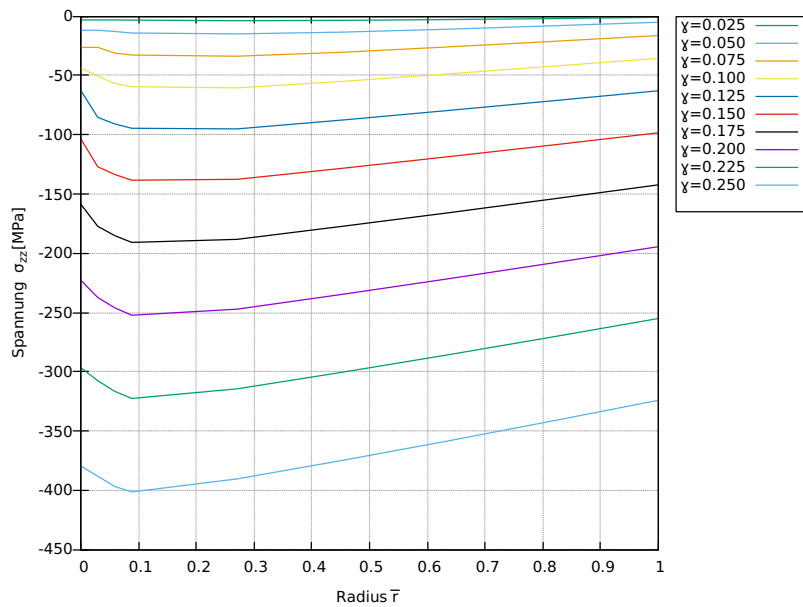


Abbildung 4.38.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 3.

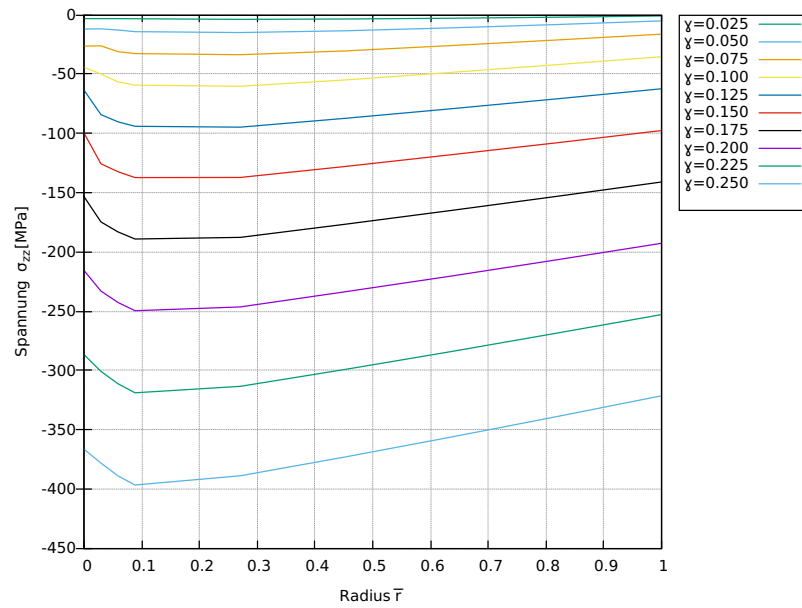


Abbildung 4.39.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 4.

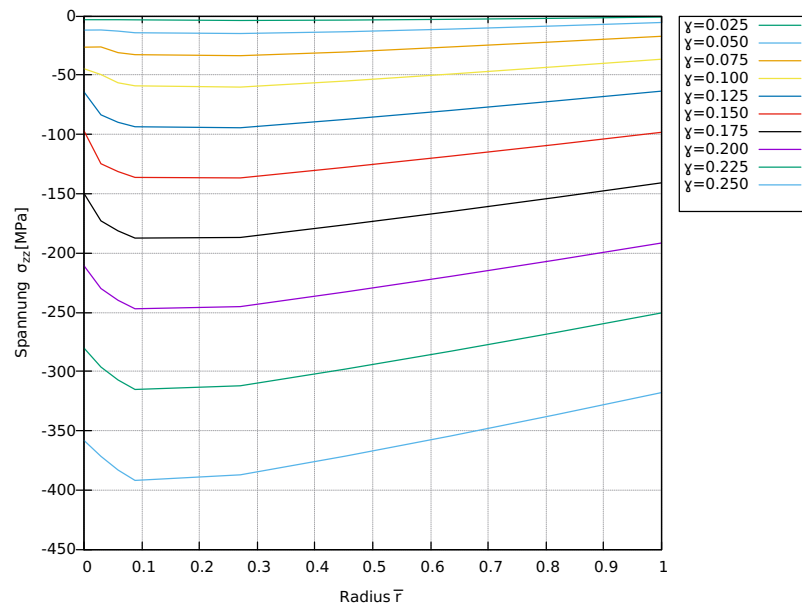


Abbildung 4.40.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 0.25$ für die Probe 5.

4.4.3 Axiale Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für Proben 1 bis 5

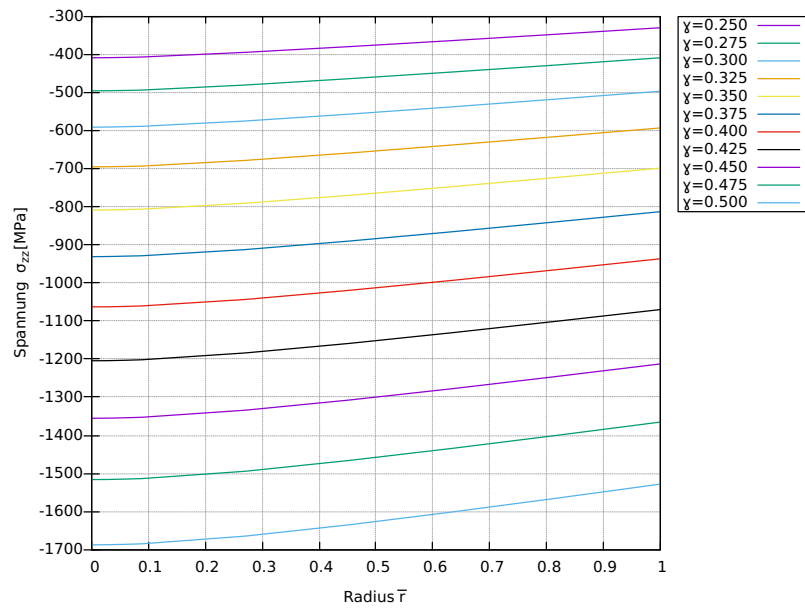


Abbildung 4.41.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 1.

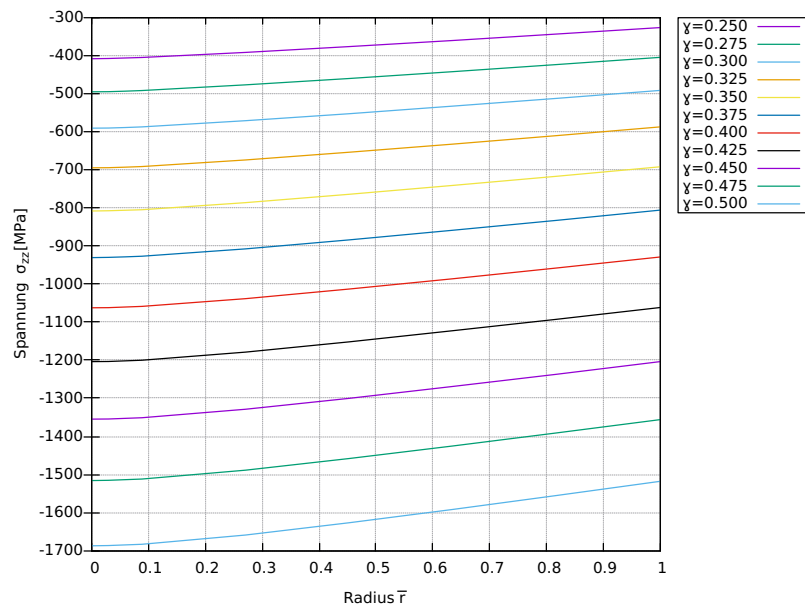


Abbildung 4.42.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 2.

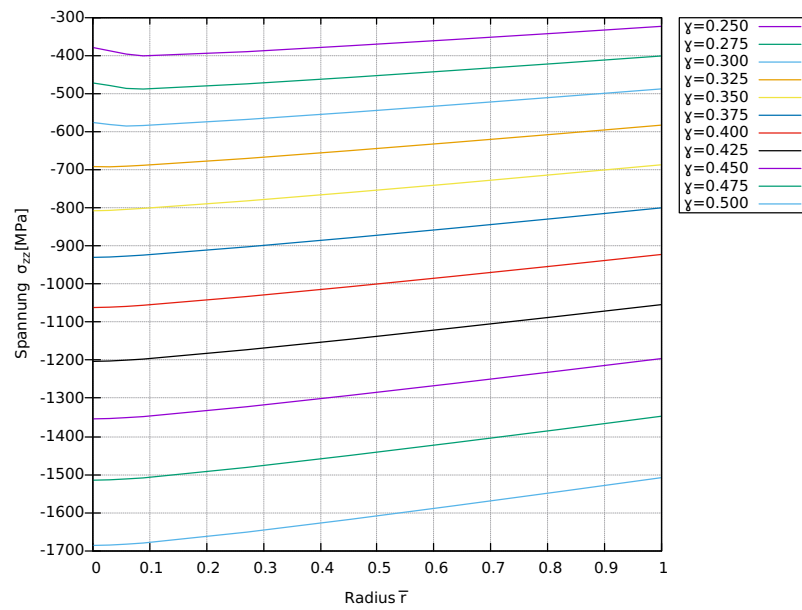


Abbildung 4.43.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 3.

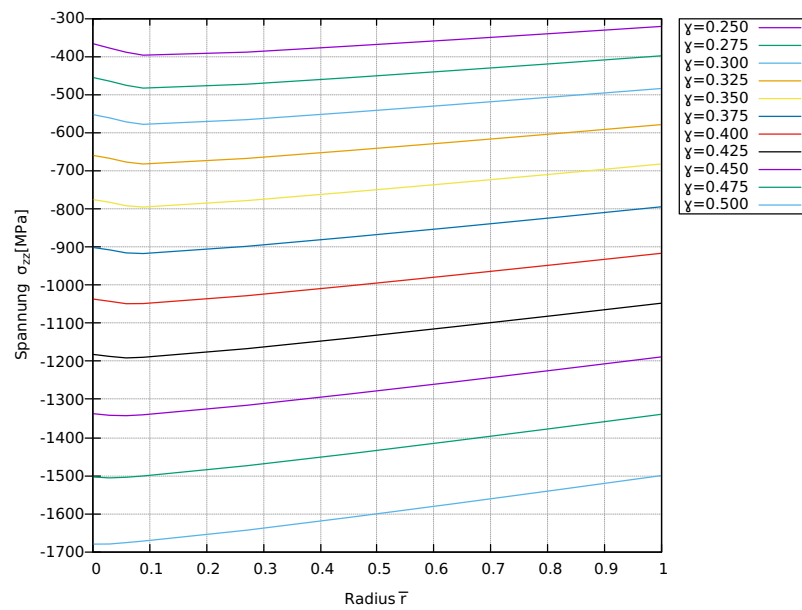


Abbildung 4.44.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 4.

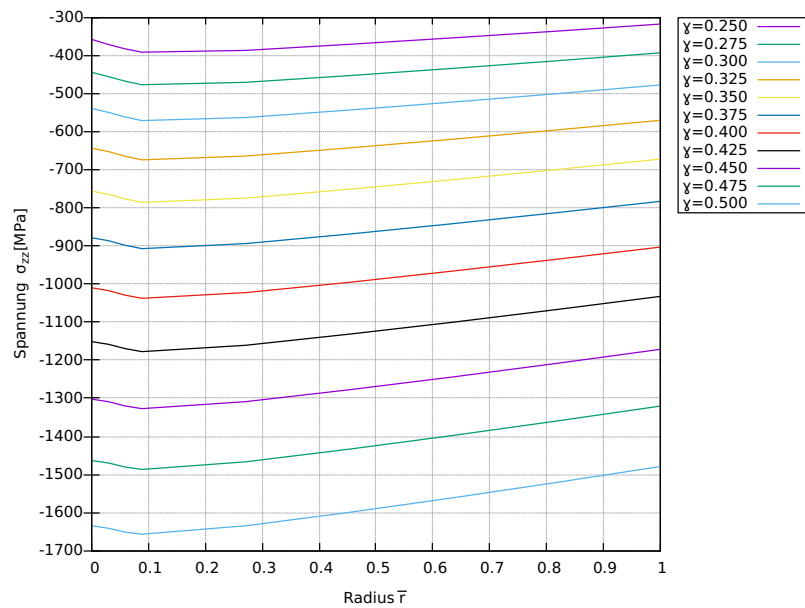


Abbildung 4.45.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0.25 \leq \gamma_a \leq 0.5$ für die Probe 5.

Analysis der Ergebnisse

- Die Abbildung 4.35 verläuft ähnlich zur Abbildung 4.13, aber bei der Kombination aus kinematischen und isotropen Verfestigung wird die Probe 3-Linie von der Probe 5 nicht geschnitten und Probe 4 von oben bei $\gamma_a \approx 0.2$ geschnitten.
- Im Abschnitt 4.4.2 ist zu bemerken, dass die Spannung in der Mitte der Proben ($x = 0$) negativer als die am Rand ($x = r$) der Proben ist.
- Im Abschnitt 4.4.3 wird das Hackenverlauf der σ_{zz} -Kurven deutlicher als im Abschnitt 4.4.2 dargestellt.

4.5 Vergleich der Modellvoraussetzungen mit dem Fall der Scherung $\gamma_a = 0.7$

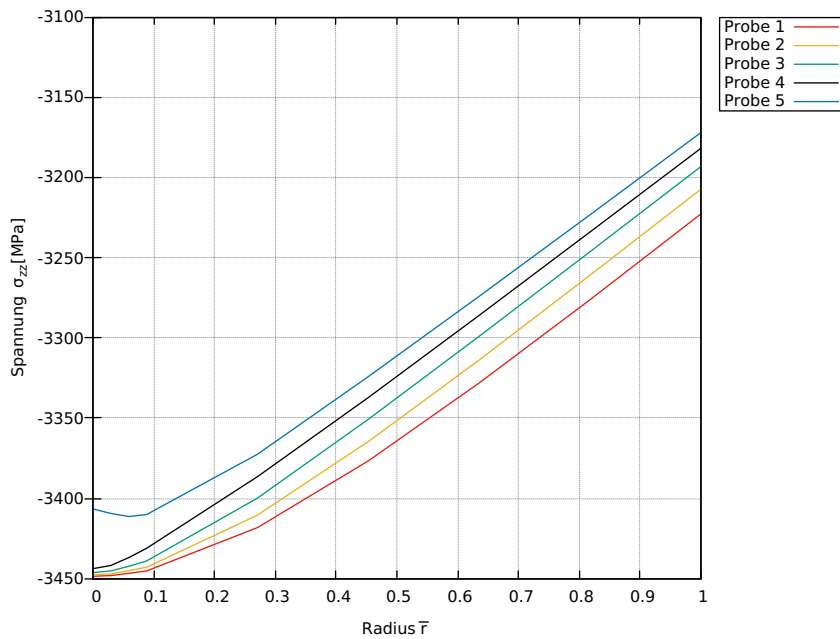


Abbildung 4.46.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss keiner Verfestigung.

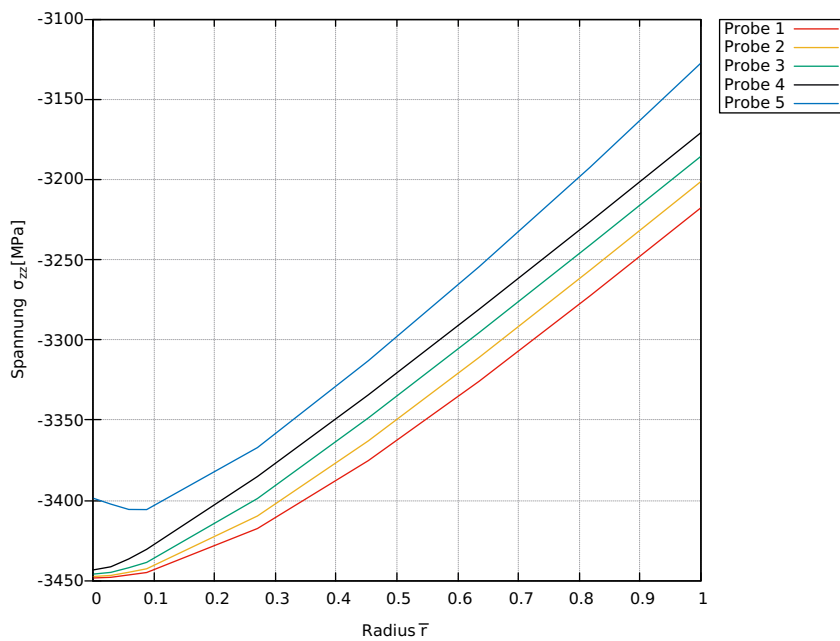


Abbildung 4.47.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer Verfestigung.

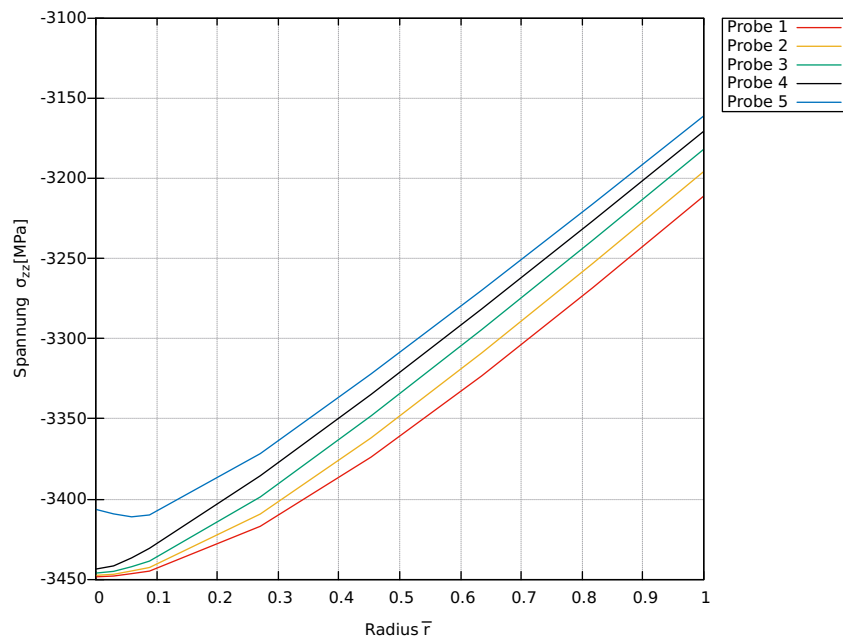


Abbildung 4.48.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss isotroper Verfestigung.

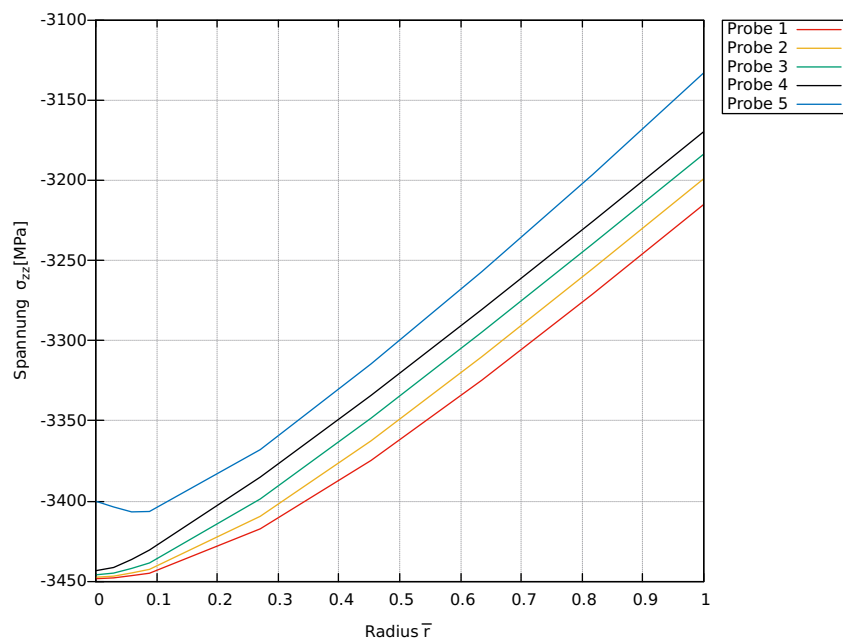


Abbildung 4.49.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Scherung $\gamma_a = 0.7$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung.

Analysis der Ergebnisse

Wenn man die Anfangspunkte bei $r = 0$ der verschiedenen Grafiken in Abschnitt 4.5 vergleicht, so stellt man fest, dass die Anfangswerte von den Proben 1 bis 4 nahezu zusammenfallen. Die Probe 5-Anfangswerte bei der verschiedenen Verfestigungsfälle sehen wie folgt aus: bei Abbildung 4.46 und 4.48 sind die Werte nahezu gleich während bei den Abbildungen 4.47 und 4.49 die Werte sehr nah sind mit $\sigma_{zz}^{(Abb. 4.47)}(r = 0) > \sigma_{zz}^{(Abb. 4.49)}(r = 0)$.

Ab $r \approx 0.3$ verlaufen bei Abbildung 4.46 die Linien der Proben gerade steigend und nahezu Parallel. Ab $r \approx 0.3$ bei Abbildung 4.48 steigen die Kurven stärker als in Abbildung 4.46.

Abbildungen 4.47 und 4.49 unterscheiden sich von Abbildungen 4.46 und 4.48 indem die Kurve von Probe 5 stärker steigt. Die Werte der Proben 1 bis 4 bei Abbildung 4.47 sind kleiner als die von Abbildung 4.49 und die Werte der Probe 5 bei der kinematischen Verfestigung sind größer als die von der Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung.

A Bewertung der Ergebnisse und Ausblick

Für die Bewertung der Ergebnisse werden die Resultate dieser Thesis mit den des Experimentes von [Fleck et al., 1994] und den der Doktorarbeit von [Grammenoudis, 2003] verglichen:

A.1 Bewertung der Ergebnisse

Die Torsionsmomente (Abbildungen 4.2, 4.13, 4.24 und 4.35) aus der einfachen Torsion der verschiedenen Proben, mit den verschiedenen Verfestigungsfälle, werden dem Torsionsmoment aus Abbildung 3.2 gegenübergestellt. Man kann merken, die berechneten Ergebnisse sind ungefähr 175% größer bei Proben 1 und 2 als die experimentellen ermittelten Torsionsmomente. Die Verläufe der Proben 3 bis 5 sehen ähnlich zu den des Experimentes aus. Die Torsionsmomente aus dem Verlauf mit keiner (Abbildung 4.2) und isotroper (Abbildung 4.24) Verfestigung aus dieser Thesis sind die, die sich mehr zu der von Abbildung 3.2 ähneln. Die Torsionsmomente aus kinematischer (Abbildung 4.13) und aus der Kombination kinematischer und isotroper (Abbildung 4.35) Verfestigung haben Kurven die sich schneiden, was im Experiment nicht der Fall ist.

Die Torsionsmomente in der Arbeit von [Grammenoudis, 2003] unterscheiden sich stark voneinander. Bei der isotropen Verfestigung werden die „Torsionsmomente überschätzt, was eine prinzipielle Eigenschaft der isotropen Verfestigung in der einfachen Torsion sein sollte“ [Grammenoudis, 2003], was die Ergebnisse dieser Arbeit nicht entspricht. Die Torsionsmomente der kinematischen Verfestigung sind näher zu den Werte des Experimentes und die der Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung nähern die Realität laut [Grammenoudis, 2003] besser an. In dieser Bachelor-Arbeit unterscheiden sich die verschiedenen Verläufe für die verschiedenen Verfestigungsfälle im Verlauf der Probe 5 stark, welcher die anderen Kurven in unterschiedlicher Weise schneidet bzw. nicht schneidet.

Die Verläufe der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius bei unterschiedlichen Scherungen γ_a für die verschiedenen Proben aus dieser Thesis wird dem der Arbeit von [Grammenoudis, 2003] gegenübergestellt. Dafür werden die Abbildungen A.1 und A.2, sowie die Abbildungen A.3 und A.4 verglichen:

Die ersten zwei Abbildungen stellen den Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} mit der Scherung $\gamma_a = 0.9$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung dar. Der größte Unterschied liegt darin, die Kurven aus dieser Arbeit (Abbildung A.2) nehmen mit geradliniger monotoner Steigung zu, während der Kurven aus [Grammenoudis, 2003] (Abbildung A.1) einen krümmen Verlauf annehmen. Beide Verläufe haben an der Mitte der Probe einen kleineren Wert als der im Radius der Probe, aber die Ergebnisse dieser Thesis nehmen viel größere Werte an.

Die nächsten zwei Abbildungen stellen den Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Probe 1 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung. Der größte Unterschied, neben die angenommenen Werte, die in dieser Thesis größer sind, ist der Verlauf der Kurven, der krumm in Abbildung A.3 und geradlinig mit verschiedenen Steigungen in verschiedenen Bereichen in Abbildung A.4 ist.

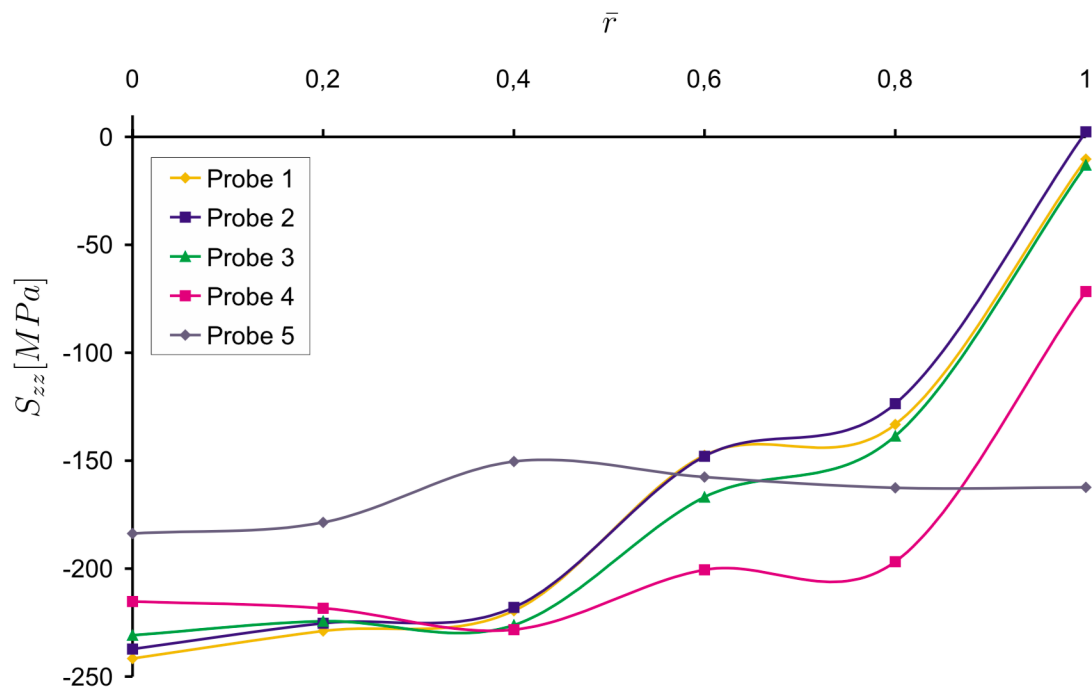


Abbildung A.1.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} mit der Scherung $\gamma_a = 0.9$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung nach [Grammenoudis, 2003].

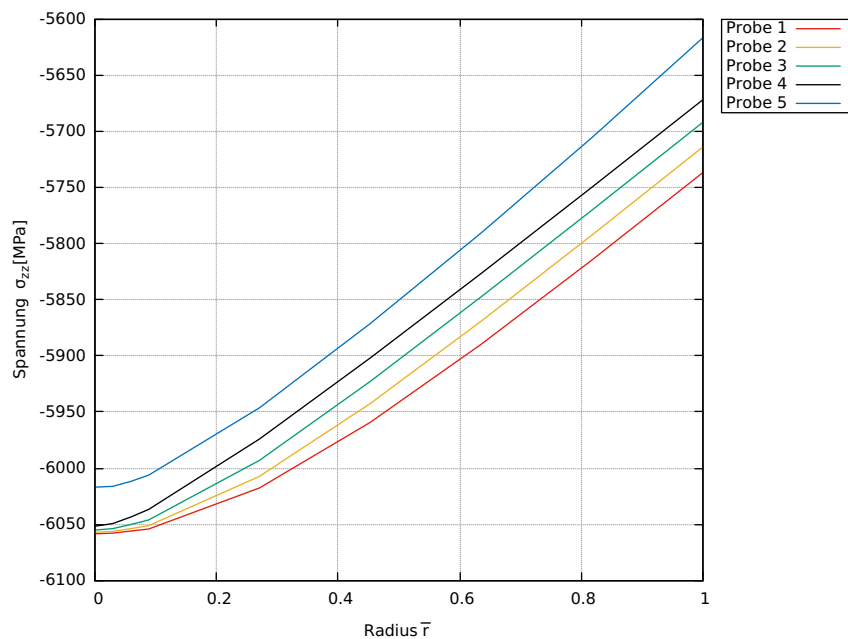


Abbildung A.2.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} mit der Scherung $\gamma_a = 0.9$ für die Proben 1-5 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung.

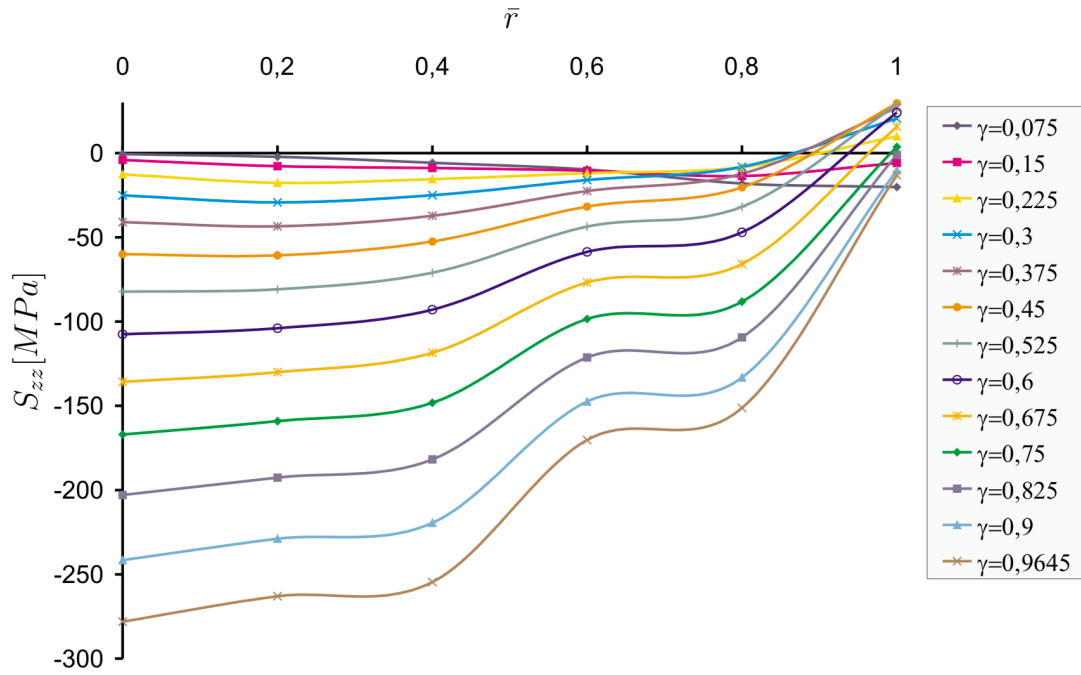


Abbildung A.3.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} für die Probe 1 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung nach [Grammenoudis, 2003].

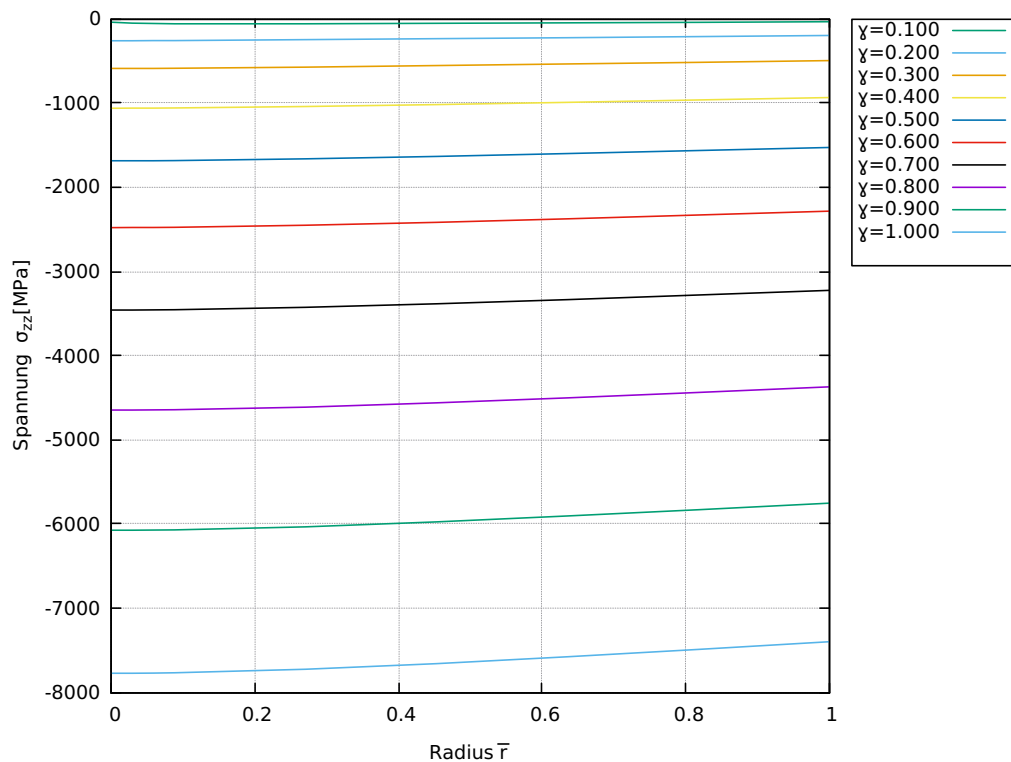


Abbildung A.4.: Verlauf der axialen Spannung σ_{zz} über den Radius \bar{r} über die Scherung $0 \leq \gamma_a \leq 1$ für die Probe 1 unter dem Einfluss kinematischer und isotroper Verfestigung.

A.2 Ausblick

Die in dieser Thesis formulierte Modell für die Simulation mechanisches Verhaltens ist in der Lage Längenskaleneffekte wiederzugeben. Die Ergebnisse der Berechnungen sind von der Probegröße, und deswegen von der Korngröße des Materials, abhängig. Die Proben 1 bis 5 nehmen ein Diameter von $12\ \mu m$ bis $170\ \mu m$ an, und die zugehörigen Korngröße im Fall des Kupfers bei [Fleck et al., 1994] entsprechen $5\ \mu m$ bis $25\ \mu m$. Wenn die Ergebnisse nicht Längen abhängig wären, dann wurden die Kurven beim Torsionsmoment zusammenfallen, was in dieser Thesis nicht der Fall ist.

Zu bemerken ist, dass die Spannung σ_{zz} bei der oberen Grundfläche des tordierten Zylinders radialsymmetrisch verteilt ist, wie in der Abbildung A.5 zu sehen ist.

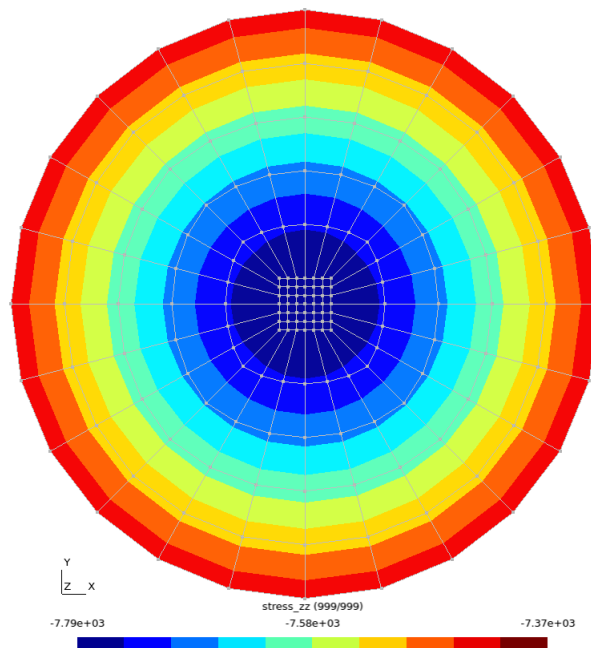


Abbildung A.5.: Verlauf der Spannung σ_{zz} bei $\gamma_a = 1$ der Probe 1.

Das vorliegende Modell konnte verbessert werden:

- Bei den Torsionsmoment-Verläufe (Abbildungen 4.2, 4.13, 4.24 und 4.35) sollte keine Überschneidung existieren.
- Probe 1 und 2 Werte bei der Torsionsmoment-Verläufe sollten kleiner sein, damit sie, die von [Fleck et al., 1994], sich nähern.

B Numerische Berechnung

In diesem Abschnitt werden die benutzte Programme dargestellt.

B.1 Elmer FEM

B.1.1 makefile

#Simulations- und Netzgenerierungspackete

```
all:                                     gfortran -c mathe.f90
    elmerf90 mysolver.f90 modell.f90 mathe.f90 -lminpack -llapack -o mysolver.so
    elmerf90 mysolver.f90 modell.f90 mathe.f90 -fopenmp -O2 -lminpack -llapack -o mysolver.so
```

#Netzgenerierung mit Hilfe von geo Dateien

```
zyl:
    echo "number_nodes_r = 6;" > zylinder.inc
    echo "number_nodes_phi = 4;" >> zylinder.inc
    echo "number_nodes_z = 2;" >> zylinder.inc
    echo "progression_z = 1.0;" >> zylinder.inc
    gmsh -3 zylinder1.geo
    ElmerGrid 14 2 zylinder1.msh -bulkorder -boundorder
    gmsh -3 zylinder2.geo
    ElmerGrid 14 2 zylinder2.msh -bulkorder -boundorder
    gmsh -3 zylinder3.geo
    ElmerGrid 14 2 zylinder3.msh -bulkorder -boundorder
    gmsh -3 zylinder4.geo
    ElmerGrid 14 2 zylinder4.msh -bulkorder -boundorder
    gmsh -3 zylinder5.geo
    ElmerGrid 14 2 zylinder5.msh -bulkorder -boundorder
```

#Simulation mit Benutzung der Solver Input File (.sif)-Datei

```
sim:
    sed -e {s/"zylinder"/"zylinder1"/} rot_zylinder.sif | sed -e
        {s/"meshout_zylinder"/"rot_zylinder1_meshout"/} > rot_zylinder1.sif
    sed -e {s/"zylinder"/"zylinder2"/} rot_zylinder.sif | sed -e
        {s/"meshout_zylinder"/"rot_zylinder2_meshout"/} > rot_zylinder2.sif
    sed -e {s/"zylinder"/"zylinder3"/} rot_zylinder.sif | sed -e
        {s/"meshout_zylinder"/"rot_zylinder3_meshout"/} > rot_zylinder3.sif
    sed -e {s/"zylinder"/"zylinder4"/} rot_zylinder.sif | sed -e
        {s/"meshout_zylinder"/"rot_zylinder4_meshout"/} > rot_zylinder4.sif
    sed -e {s/"zylinder"/"zylinder5"/} rot_zylinder.sif | sed -e
        {s/"meshout_zylinder"/"rot_zylinder5_meshout"/} > rot_zylinder5.sif
    xterm -hold -title "Zylinder 1" -e ElmerSolver rot_zylinder1.sif &
    xterm -hold -title "Zylinder 2" -e ElmerSolver rot_zylinder2.sif &
    xterm -hold -title "Zylinder 3" -e ElmerSolver rot_zylinder3.sif &
    xterm -hold -title "Zylinder 4" -e ElmerSolver rot_zylinder4.sif &
    xterm -hold -title "Zylinder 5" -e ElmerSolver rot_zylinder5.sif
```

B.1.2 rot_zylinder.sif

Check Keywords "Warn"

Header

Mesh DB "." "zylinder"

End

```

#Simulationsvorgaben
Simulation
  Max Output Level = 3
  Coordinate System = "Cartesian 3D"
  Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
  Simulation Type = "Transient"
  Timestep Sizes(1) = 0.001
  Timestep Intervals(1) = 10000
  Gaussdata File = String "gaussdata.txt"
! Output Intervals(1) = 10
! Output File = "output.restart"
! History File = String "history.txt"
! Output Variable 1 = String Disp 1
! Output Variable 2 = String Disp 2
! Output Variable 3 = String Disp 3
! Output Variable 4 = String Rot 1
! Output Variable 5 = String Rot 2
! Output Variable 6 = String Rot 3
End

Body 1
  Name = "Zylinder"
  Equation = 1
  Material = 1
End

Equation 1
  Active Solvers(1) = 1
End

#Materialparameter
Material 1
  Youngs modulus = Real 46000.0
  Poisson ratio = Real 0.3
  Alpha = Real 3000.0
  Beta = Real 0.0
  Gamma = Real 0.01
  Delta = Real 0.0
  a_1 = Real 0.75
  a_2 = Real 0.25
  a_3 = Real 10000.0
  a_4 = Real 10000.0
  k0 = Real 70.0
  b_1 = Real 0.002
  b_2 = Real 0.002
  bc_1 = Real 0.002
  bc_2 = Real 0.002
  c_1 = Real 0.0
  c_2 = Real 800.0
  c_3 = Real 100.0
  c_4 = Real 0.0
  c_5 = Real 0.0001
  c_6 = Real 0.0
  beta_iso = Real 0.0
  gamma_iso = Real 0.0
! beta_iso = Real 16.0
! gamma_iso = Real 700.0
End

Solver 1
  Exec Solver = "always"
  Equation = "mysolver"
  Variable = Displacements[Disp:3 Rot:3]

```

```

Variable DOFs = 6
Procedure = "mysolver" "MySolver"
Calculate Loads = logical true
! Linear System Solver = "direct"

Linear System Solver = "iterative"
Linear System Iterative Method = "BiCGstab"
Linear System Max Iterations = 100
Linear System Convergence Tolerance = 1.0E-10

Nonlinear System Convergence Measure = "norm"
Nonlinear System Max Iterations = 15
Nonlinear System Convergence Tolerance = Real 1.0E-9
End

Solver 2
! Exec Solver = "never"
Exec Solver = "after timestep"
Equation = "ResultOutput"
Procedure = "ResultOutputSolve" "ResultOutputSolver"
Output File Name = "meshout_zylinder"
Gmsh Format = logical true
Vector Field 1 = String Disp
Vector Field 2 = String Rot
Scalar Field 1 = String stress_xx
Scalar Field 2 = String stress_yy
Scalar Field 3 = String stress_zz
Scalar Field 4 = String stress_xy
Scalar Field 5 = String stress_xz
Scalar Field 6 = String stress_yz
Scalar Field 7 = String stress_c_zz
! Show Variables = logical true
End

Solver 3
Exec Solver = "after timestep"
Procedure = "SaveData" "SaveScalars"
Filename = "erg_zylinder.dat"
Variable 1 = "Time"
Variable 2 = stress_xx
Operator 2 = mean
Variable 3 = stress_yy
Operator 3 = mean
Variable 4 = stress_zz
Operator 4 = mean
Variable 5 = stress_xz
Operator 5 = mean
Variable 6 = stress_yz
Operator 6 = mean
End

Solver 4
Exec Solver = "after timestep"
Procedure = "SaveData" "SaveLine"
Filename = "stress_zz.dat"
Variable 1 = "Time"
Variable 2 = stress_xx
Operator 2 = mean
Variable 3 = stress_yy
Operator 3 = mean
Variable 4 = stress_zz
Operator 4 = mean
Variable 5 = stress_xz
Operator 5 = mean

```

```

Variable 6 = stress_yz
Operator 6 = mean
End

Boundary Condition 1
Name = "Zylinder Unterseite"
Target Boundaries(1) = 2

! Disp 1 = Variable Time, Coordinate 1, Coordinate 2, "Timestep size"
!   Real MATC "(-tx(1)*sin(tx(0))+tx(2)*cos(tx(0))) * tx(3) "
! Disp 2 = Variable Time, Coordinate 1, Coordinate 2, "Timestep size"
!   Real MATC "(-tx(1)*cos(tx(0))-tx(2)*sin(tx(0))) * tx(3)"
Disp 1 = Real 0.0
Disp 2 = Real 0.0
Disp 3 = Real 0.0
Rot 1 = Real 0.0
Rot 2 = Real 0.0
Rot 3 = Real 0.0
! Rot 3 = Variable "Timestep size"
!   Real MATC "-1.0*tx(0)"
End

Boundary Condition 2
Name = "Zylinder Oberseite"
Target Boundaries(1) = 1

Disp 1 = Variable Time, Coordinate 1, Coordinate 2, "Timestep size"
Real MATC "(-tx(1)*sin(tx(0))-tx(2)*cos(tx(0))) * tx(3) "
Disp 2 = Variable Time, Coordinate 1, Coordinate 2, "Timestep size"
Real MATC "(tx(1)*cos(tx(0))-tx(2)*sin(tx(0))) * tx(3)"
Disp 3 = Real 0.0
Rot 1 = Real 0.0
Rot 2 = Real 0.0
! Rot 3 = Real 0.0
Rot 3 = Variable "Timestep size"
Real MATC "1.0*tx(0)"
End

RUN

!End Of File

```

C Auswertungsroutine

C.1 Awk

C.1.1 progtesis.awk

In Terminal: `awk -f progtesis.awk rot_zylinder_meshout.msh`

```
#Gewollte (x,y,z) Punkte gesucht
#Knotennummer und x-Wert gehen auf "prog"
/Nodes/           {read=1}
/EndNodes/        {read=0}
read && NF == 4     {x=$2; y=$3; z=$4}
read && z > max      {delete set; i=1; max=z}
read && x >= 0 && y == 0 && z == max {set[i++]=$1 " " $2}
END {for (i in set) {printf "%s\n", set[i]>"prog"}}
```



```
#Scherungen suchen und in "prog3" speichern
/rot/             {r=1}
/EndNodeData/     {r=0}
r && NF==4         {phi=$4}
r && phi>maxp       {maxp=phi}
{if (maxp!="")print maxp>"prog3"}
```



```
#Sucht Spannung_zz von (x,y,z) und speichert die in "prog2"
/stress_zz/       {f=1}
f {print>"prog2"}
/EndNodeData/     {f=0}
```

C.1.2 Sortier-Befehl in Terminal

```
#Sortierung der x-Werte in zunehmender Weise
sort -k2 -n prog>"progs1"
```

C.1.3 progs1.awk

In Terminal: `awk -f progs1.awk progs progs`

```
FNR==NR {max=$2;next}
NF==2 {print $1 " " $2/max>"prog1"}
```

C.1.4 progrot.awk

In terminal: `awk -f progrot.awk prog3`

```
#Wiedergabe der Scherungen ohne Wiederholung zu "proggraf"
!seen[$0] {print "Gamma: " $0>"proggraf"}
{++seen[$0]}
```

C.1.5 progfin.awk

In Terminal: `awk -f progfin.awk prog1 prog2`

```
#Spannung_zz vom ersten berechneten Scherung zu "proggraf"
FNR==NR {a[$1]=$0;k=NR;i=0;next};
$1 in a {i=i+1;if (i<=k){print (i-1)/(k-1) " " $1, $2>"proggraf"}}

#Spannung_zz von letzten berechneten Scherung zu "proggraf"
FNR==NR {a[NR]=$1; k=NR;next};
{b[$1]=$0;j=k-1}
END {for (i in a) if (a[i] in b) print 1/j*(i-1) " " b[a[i]]>"proggraf"}}

#Spannung_zz von verschiedenen Scherungen zu "proggraf"
FNR==NR {a[NR]=$1;k=NR;i=1;next};
$1 in a && i<=k {b[i]=$1;i=i+1}
{for (j in b) if (a[j]==$1) print c[j] " " a[j] " " $2>>"proggraf"}}
```

C.1.6 progpro.awk

In Terminal: `awk -f progpro.awk proggraf`

```
#Einteilung der zusammengehöerigen Spannungen und Scherung in Datenblocks in "proggnu" gespeichert
NF==2 {a[NR]=$2}
$1!=0 {print $0>"proggnu"}

$1==0 {i=i+1; print "">"proggnu";print "">"proggnu"; printf "Éč=" "%.3f\n",a[i] "">"proggnu";print
"Radius" " " "Nodes" " " "Sress_zz">>"proggnu" ;print $0>>"proggnu"}}
```

C.2 Gnuplot

C.2.1 zylinder.plt

```
reset
set noborder

#Skalenstrichesezung
set xtics axis
set ytics axis

#Achsenbeschriftung
set xlabel "{/Symbol g}_a" offset 0,-0.5,0
set ylabel "M/r@^3_{a}} [MPa]" rotate by 90 offset 1.5,0,0

#Referenzgitter und Legendeposition
set grid
show grid
set key outside right top box

#Proben, die man darstellen will, mit verschiedenen Farben
plot "torsion1.dat" lc 7 lt 2 lw 2 w l title "Probe 1"
replot "torsion2.dat" lc 1 lt 2 lw 2 w l title "Probe 2"
replot "torsion3.dat" lc 2 lt 2 lw 2 w l title "Probe 3"
replot "torsion4.dat" lc 0 lt 2 lw 2 w l title "Probe 4"
```

```
replot "torsion5.dat" lc 6 lt 2 lw 2 w l title "Probe 5"
```

```
#.ps Output
set output "plot.ps"
set terminal postscript portrait color
replot
```

C.2.2 progtesis.gp

```
#Vernetzung der Grafik und Axisbenennung
```

```
set size 1,1
set xlabel "Radius ~r{.6/Symbol -}"
set ylabel "Spannung {/Symbol s}_{zz}[MPa]"
set grid
show grid
set key outside right top box
set xtics border
set ytics axis
```

```
#Spannungsverlaeufe ueber Radius verschiedener Scherungen
```

```
#plot for [nel=250:500:25] "proggnu" i nel u 1:3 w lp title columnheader (1) smooth unique
```

```
#Spannungsverlaeufe ueber Radius mit gamma=0,7
```

```
plot for [nel=699:699] "proggnu1" i nel u 1:3 title "Probe 1" lc 7 with lines smooth unique
```

```
replot for [nel=699:699] "proggnu2" i nel u 1:3 title "Probe 2" lc rgb '#edb120' with lines smooth unique
```

```
replot for [nel=699:699] "proggnu3" i nel u 1:3 title "Probe 3" lc 2 with lines smooth unique
```

```
replot for [nel=699:699] "proggnu4" i nel u 1:3 title "Probe 4" lc rgb '#000004' with lines smooth unique
```

```
replot for [nel=699:699] "proggnu5" i nel u 1:3 title "Probe 5" lc rgb '#0072bd' with lines smooth unique
```



Literaturverzeichnis

- [Barlow et al., 1995] Barlow, D., Robbins, A., Rubin, P., Stallman, R., and Oostrum, P. (1995). The awk manual.
- [Birnthaler, 2016] Birnthaler, T. (2016). Die programmiersprache awk: Einführung, tipps and tricks.
- [Bröse, 2017] Bröse, C. (2017). *Plastizitätstheorie Skript WS 17/18*. TU Darmstadt.
- [Close et al., 1993] Close, D. B., Robbins, A. D., Rubin, P. H., and Stallman, R. (1993). The gawk manual. *Cambridge, MA, 0.15 edition*.
- [Cosserat et al., 1909] Cosserat, E., Cosserat, F., and Andere (1909). *Théorie des corps déformables*.
- [Eringen, 1999a] Eringen, A. C. (1999a). *Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids*. Springer.
- [Eringen, 1999b] Eringen, A. C. (1999b). Theory of micropolar elasticity. In *Microcontinuum field theories*, pages 101–248. Springer.
- [Eringen and Suhubi, 1964] Eringen, A. C. and Suhubi, E. (1964). Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-i. *International Journal for Engineering Science*, 2(2):189–203.
- [Fleck et al., 1994] Fleck, N., Muller, G., Ashby, M., and Hutchinson, J. (1994). Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42(2):475–487.
- [Geuzaine and Remacle, 2015] Geuzaine, C. and Remacle, F. (2015). Gmsh reference manual. URL www.geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf.
- [Grammenoudis, 2003] Grammenoudis, P. (2003). *Mikropolare Plastizität*. PhD thesis, Technische Universität.
- [Grammenoudis and Tsakmakis, 2001] Grammenoudis, P. and Tsakmakis, C. (2001). Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: Restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of il’iushin. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 13(5):325–363.
- [Grammenoudis and Tsakmakis, 2005] Grammenoudis, P. and Tsakmakis, C. (2005). Finite element implementation of large deformation micropolar plasticity exhibiting isotropic and kinematic hardening effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(12):1691–1720.
- [Gross and Seelig, 2016] Gross, D. and Seelig, T. (2016). *Bruchmechanik: mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer-Verlag.
- [Haupt, 1996] Haupt, P. (1996). Konzepte der materialtheorie. *Technische Mechanik*, 16(1):13–22.
- [Lyly, 2017] Lyly, M. (2017). Elmergui manual v. 0.4. URL www.nic.funet.fi/pub/sci/physics/elmer/doc/ElmerguiManual.pdf.
- [Mindlin, 1964] Mindlin, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1):51–78.
- [Williams et al., 2015] Williams, T., Kelley, C., Bersch, C., Bröker, H.-B., Campbell, J., Cunningham, R., Denholm, D., Elber, G., Fearick, R., Grammes, C., and Andere (2015). Gnuplot 5.3.
- [Wriggers, 2008] Wriggers, P. (2008). *Nonlinear finite element methods*. Springer Science & Business Media.



Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 12. Dezember 2017

(George Humberto Bernui Urday)